

MECHANIKA TECHNICZNA

PODRĘCZNIK. STUDIA PRZYPADKÓW



SYLWESTER SAMBORSKI

7
TOM

MECHANIKA TECHNICZNA

Elementy statyki i kinematyki

Część pierwsza

Podręcznik

Sylwester Samborski

Lublin 2021

WYŻSZA SZKOŁA EKONOMII I INNOWACJI W LUBLINIE

Seria wydawnicza:

Kompetencje, Wiedza, Innowacje – Zintegrowany Program Rozwoju WSEI w Lublinie –
Etap III

Tom 7

MECHANIKA TECHNICZNA. ELEMENTY STATYKI I KINEMATYKI

Cz. I - Podręcznik Cz. II - Studia przypadków

Autor:

Sylwester Samborski
ORCID: 0000-0002-3524-3200

Recenzent:

prof. Mariusz Walczak

Korekta:

Grzegorz Janowski

Skład, łamanie:

Marta Krysińska-Kudlak

Projekt okładki:

Patrycja Kaczmarek

Grafika na okładce:

geralt/Pixabay.com
macrovector/Freepik.com

@Copyright by

Innovatio Press, Lublin 2021

Wszelkie prawa zastrzeżone. W sprawie kopiowania lub rozpowszechniania fragmentów
albo całości niniejszej pracy należy kontaktować się z wydawcą.

Publikacja oraz recenzje zrealizowano w ramach Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja
Rozwój 2014-2020 współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

Proces wydawniczy (korekta, skład) sfinansowano z dotacji na zadania związane z zapew-
nieniem osobom niepełnosprawnym warunków do pełnego udziału w procesie kształcenia.

Printed in Poland

Innovatio Press Wydawnictwo Naukowe

Wyższej Szkoły Ekonomii i Innowacji

20-209 Lublin, ul. Projektowa 4

tel.: +48 81 749 17 77, fax: + 48 81 749 32 13

www.wsei.lublin.pl

ISBN – wersja elektroniczna: 978-83-66159-81-5

Spis treści

Przedmowa.....	5
1. Elementy statyki	7
1. Pojęcia podstawowe.....	8
1.1. Prawa Newtona.....	10
1.2. Więzy i ich reakcje	12
2. Płaskie układy sił	25
2.1. Płaski zbieżny układ sił	25
2.2. Równowaga płaskiego zbieżnego układu sił	27
3. Tarcie.....	29
3.1. Tarcie ślizgowe.....	30
3.2. Tarcie cięgien	33
4. Dowolny płaski układ sił	34
4.1. Redukcja płaskiego dowolnego układu sił	38
4.2. Równowaga płaskiego dowolnego układu sił	40
5. Kratownice płaskie	41
5.1. Metody rozwiązywania kratownic płaskich.....	42
5.2. Procedura rozwiązywania kratownic płaskich.....	43
6. Przestrzenny układ sił	46
6.1. Przestrzenny zbieżny układ sił.....	46
6.2. Przestrzenny układ sił równoległych	48
6.3. Środki ciężkości	51
6.4. Momenty statyczne.....	53
6.5. Przestrzenny dowolny układ sił.....	55
6.6. Przypadki redukcji dowolnego układu sił	59
6.7. Równowaga przestrzennego układu sił	59
7. Przykłady zadań ze statyki z rozwiązaniami	61
8. Pytania testowe	75

2. Elementy kinematyki.....	81
1. Opis ruchu punktu materialnego	82
1.1. Równania ruchu punktu materialnego	82
1.2. Równanie ruchu punktu w układzie naturalnym	83
1.3. Prędkość punktu materialnego jako wektor	85
1.4. Przyspieszenie punktu materialnego jako wektor	87
1.5. Ruch prostoliniowy punktu materialnego	88
1.6. Ruch harmoniczny	90
1.7. Analogia pomiędzy ruchem harmonicznym a ruchem punktu po okręgu.....	93
1.8. Przyspieszenie styczne i przyspieszenie normalne punktu w ruchu krzywoliniowym	94
1.9. Naturalny układ współrzędnych w przestrzeni	97
2. Kinematyka ciała sztywnego	101
2.1. Ruch postępowy ciała sztywnego	103
2.2. Ruch obrotowy ciała sztywnego.....	105
2.3. Szczególne przypadki ruchu obrotowego ciała sztyw- nego	112
2.4. Ruch płaski ciała sztywnego	114
2.5. Prędkości ciała sztywnego w ruchu płaskim	116
2.6. Przyspieszenia ciała sztywnego w ruchu płaskim....	119
3. Przykłady zadań z kinematyki z rozwiązaniami	125
4. Pytania testowe	137
Literatura	140
A. Literatura podstawowa.....	140
B. Literatura uzupełniająca.....	140
Odpowiedzi do pytań testowych	142

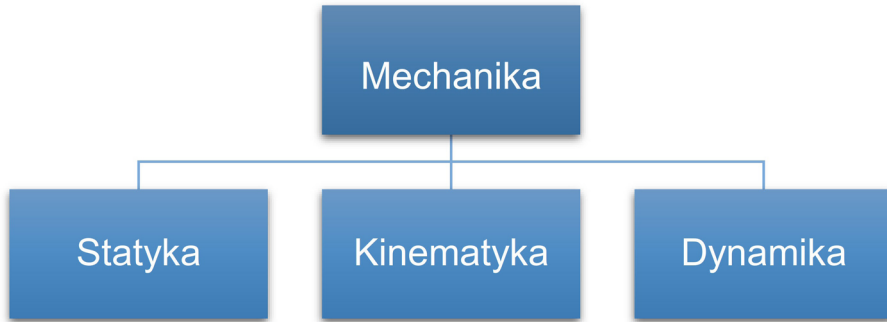
Przedmowa

Skrypt złożony w ręce Czytelnika, jest w dużej mierze zapisem wykładów z mechaniki ogólnej (klasycznej), prowadzonych od wielu lat przez Autora w szkołach wyższych Lubelszczyzny. Zakres tematyczny opracowania obejmuje wybrane tematy (elementy) ze statyki oraz kinematyki, zgodnie z sylabusem przedmiotu „Mechanika techniczna”, oferowanego studentom I roku kierunku Mechatronika w Wyższej Szkole Ekonomii i Innowacji w Lublinie.

Skrypt składa się z dwóch głównych rozdziałów: „Elementy statyki” i „Elementy kinematyki”, po których umieszczono pytania sprawdzające wiedzę, w formie testowej oraz rozwiązane przykłady zadań. Kierując się zawartością sylabusa przedmiotu, pominięto niektóre zagadnienia statyki i kinematyki; skrypt nie obejmuje też zagadnień dynamiki – trzeciego, ważnego działu mechaniki (Rys. 1), omawianych zazwyczaj na uczelniach technicznych w ramach odrębnych przedmiotów. Osobnym opracowaniem objęto tzw. *case studies*, czyli studia przypadków, oparte na doświadczeniu zawodowym Autora. Opisy te nawiązują do obliczeń przeprowadzonych w ramach zleceń z przemysłu, przy czym w trosce o dochowanie tajemnicy zawodowej nadano im formę uproszczoną i nieco zbeletryzowaną.

Ogólna forma skryptu została tak pomyślana, aby Czytelnik był w stanie sprawnie i bez znużenia przejść przez podstawowe zagadnienia mechaniki z pominięciem przypisów. Przypisy z kolei mają za zadanie ułatwić głębsze zrozumienie praw mechaniki, w zakresie

objętym skryptem, oraz zachęcenie do poszerzenia osobistej wiedzy, między innymi przez sięgnięcie do proponowanej literatury przedmiotu. Ma to szczególne znaczenie podczas powtarzania materiału i przygotowywania się do zaliczenia.



Rys. 1 Podział mechaniki ogólnej (klasycznej)

1

2

1. Elementy statyki



$\sqrt{3}$

$$\mathbf{r}_{\perp} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{n})$$

$\sqrt{2}$



Drehung



Punktspiegelung

1. Pojęcia podstawowe

Wśród pojęć podstawowych, którymi posługuje się każdy kurs mechaniki, należy wymienić:

przestrzeń – przestrzeń euklidesowa, czyli przestrzeń trójwymiarowa;
czas t (czas absolutny) – pojęcie podstawowe – zmienna niezależna; czas jest taki sam dla wszystkich punktów w przestrzeni i nie zależy od wyboru układu odniesienia;

układ kartezjański – prostokątny układ odniesienia, ustanowiony na trzech wzajemnie prostopadłych wektorach jednostkowych (wersorach), tworzących trójkę prawą (prawoskrętną);

masa – współczynnik charakteryzujący bezwładność ciała;

skalar – wielkość fizyczna, do opisanie której wystarczy podać jedną liczbę (wartość), np. ciśnienie, temperatura.

wektor - wielkość fizyczna, do opisu której potrzeba trzech liczb¹ (długości rzutów wektora na trzy osie prostokątnego układu odniesienia), np. siła, prędkość, pęd; wektor można przedstawić graficznie za pomocą odcinka z określonym zwrotem (strzałką), którego długość odpowiada wartości reprezentowanej przez niego wielkości fizycznej.

siła – wielkość fizyczna wektorowa² przedstawiająca wzajemne oddziaływanie na siebie ciał fizycznych³;

ruch – zjawisko zmiany położenia ciała materialnego w czasie i przestrzeni – względem pewnego układu odniesienia;

¹ W fizyce wektor określa się zazwyczaj jako wielkość mającą kierunek, zwrot, wartość i punkt przyłożenia; jest to zgodne z definicją podaną wyżej, szczególnie dla wektora reprezentującego siłę, z tym że siłę można przesuwając wzdłuż jej kierunku działania, jak pokazano dalej; w związku z tym, zamiast punktu przyłożenia siły należy w mechanice rozważać punkty, przez które przechodzi linia działania (kierunek) siły.

² Oprócz sił skupionych (np. ciężar ciała) w mechanice występują też tzw. momenty sił, które przedstawia się za pomocą wektorów z podwójnym grotem – tzw. wektorów osiowych.

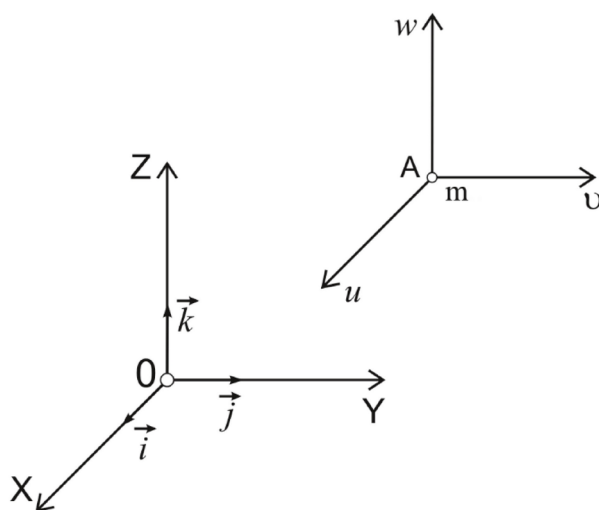
³ Pod względem sposobu działania rozróżnia się siły masowe (objętościowe) oraz siły powierzchniowe; pod względem natury – siły zewnętrzne i siły wewnętrzne, przy czym te pierwsze występują w mechanice ciała sztywnego i można je podzielić na siły czynne oraz bierne (reakcje), zaś te drugie wyznacza się w wytrzymałości materiałów, przynależącej do mechaniki ciał odkształcalnych.

stopień swobody – niezależna możliwość ruchu ciała⁴; każde ograniczenie ruchu ciała (odebranie mu możliwości ruchu) powoduje pojawienie się reakcji (siły biernej, momentu utwierdzenia);

punkt materialny – model ciała fizycznego o trzech translacyjnych stopniach swobody (Rys. 2), czyli trzech możliwościach ruchu postępowego w układzie kartezjańskim bez uwzględnienia ruchu obrotowego ciała; rozmiary punktu materialnego są znikomo małe w porównaniu z rozpatrywanym obszarem jego ruchu;

układ punktów materialnych – model układu ciał fizycznych sprowadzonych myślowo do punktów materialnych, poruszających się w ten sposób, że mogą się zmieniać wzajemne odległości pomiędzy punktami, ale położenie każdego punktu jest zależne od położenia pozostałych punktów⁵;

ciało sztywne – model ciała fizycznego, w którym odległości pomiędzy poszczególnymi punktami nie ulegają zmianie w czasie ruchu ciała (por. zasada zeszytnienia).

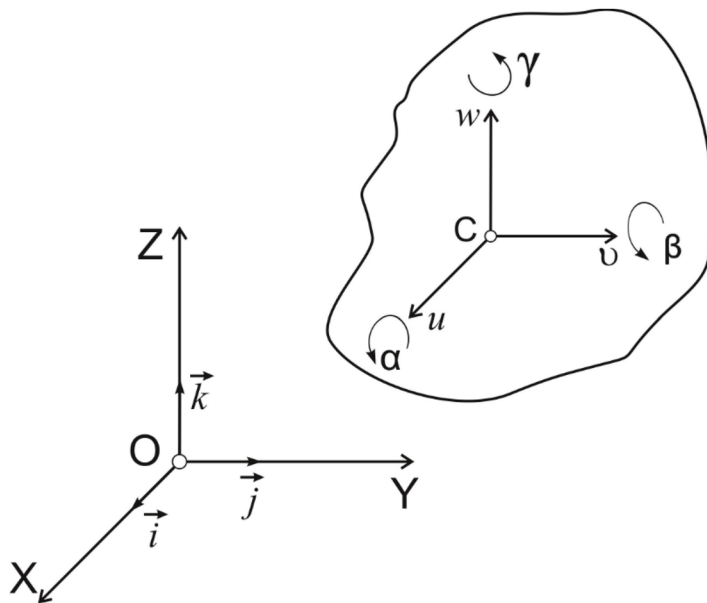


Rys. 2 Punkt materialny i jego stopnie swobody

⁴ Ciało w przestrzeni ma w ujęciu mechaniki klasycznej 6 stopni swobody, tzn. 3 niezależne przesunięcia (translacje) wzdłuż osi kartezjańskiego układu odniesienia, oraz 3 niezależne obroty wokół osi, przy czym przestrzenny ruch obrotowy można opisywać jako tzw. ruch kulisty, jak to pokazał Euler. Z kolei w przestrzeni dwuwymiarowej ciało sztywne ma co najwyżej 3 stopnie swobody, w tym jedną możliwość obrotu.

⁵ W szczególnym przypadku będzie to ciało sztywne.

ciało sztywne⁶ – model ciała fizycznego, w którym odległości pomiędzy jego poszczególnymi punktami nie zmieniają się w czasie ruchu ciała⁷, a w opisie ruchu tego ciała nie można zaniedbać ruchu obrotowego (Rys. 3);



Rys. 3 Ciało sztywne i jego stopnie swobody

1.1. Prawa Newtona

Poniżej przedstawiono i omówiono **trzy podstawowe prawa mechaniki sformułowane przez Isaaca Newtona**⁸. Prawa te uznawane są za podstawę mechaniki ogólnej (klasycznej), a szczególnie dynamiki⁹.

⁶ Por. z opisaną dalej „zasada zeszywnienia”.

⁷ Można powiedzieć, że pewien obszar przestrzeni jest wypełniony w sposób ciągły punktami materialnymi.

⁸ Niektórzy autorzy podają jeszcze prawo czwarte (prawo niezależności działania sił) i piąte (prawo grawitacji) - por. Misiak, J.: *Mechanika ogólna*, tom 1.

⁹ Według niektórych podręczników statykę można traktować jak szczególny dział dynamiki, przy założeniu, że ciała materialne pozostają w spoczynku.

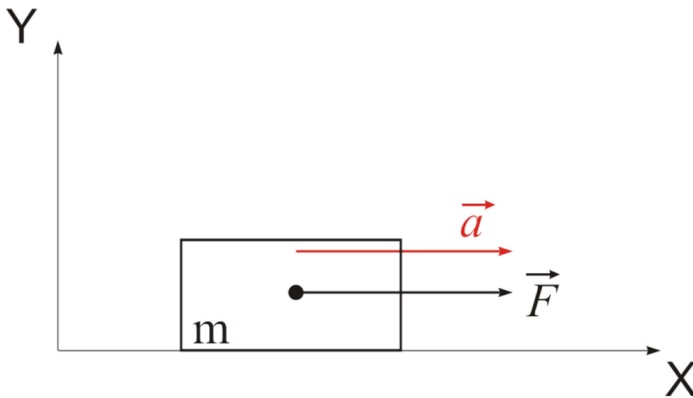
I

Ciało materialne (punkt materialny), na które nie działa żadna siła lub działa zrównoważony układ sił, pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

II

Jeżeli na punkt materialny działa siła $\vec{F}$ to doznaje on przyspieszenia $\vec{a}$ o wartości wprost proporcjonalnej do wartości siły, a odwrotnie proporcjonalnej do masy m punktu; wektor przyspieszenia $\vec{a}$ ma kierunek i zwrot zgodny z wektorem siły $\vec{F}$ (**Rys. 4**).

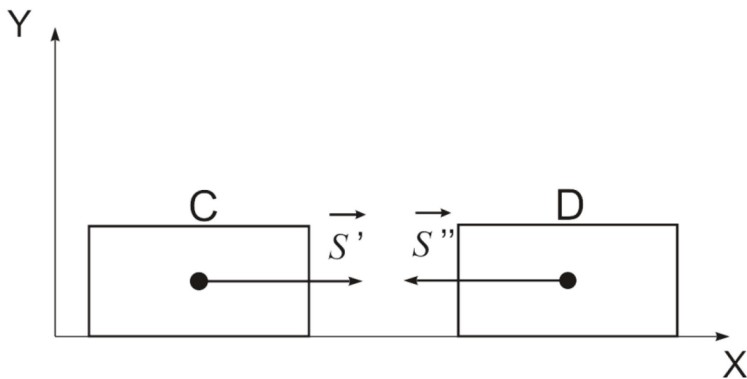
$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1.1)$$



Rys. 4 Ilustracja II prawa Newtona

III

Siły wzajemnego oddziaływania $\vec{S}'$ i $\vec{S}''$ dwóch ciał materialnych (punktów materialnych) mają równe wartości i wspólną linię działania, a przeciwne zwroty (**Rys. 5**).



Rys. 5 Ilustracja graficzna III prawa Newtona

1.2. Więzy i ich reakcje

Więzy to ograniczenia swobody ruchu ciał materialnych. Każde ograniczenie możliwości ruchu (odebranie stopnia swobody) powoduje pojawienie się **reakcji – siły biernej (skupionej lub momentu)**.



WAŻNE

Wyznaczanie reakcji jest głównym zadaniem statyki, w ramach której analizuje się zagadnienia równowagi ciał.

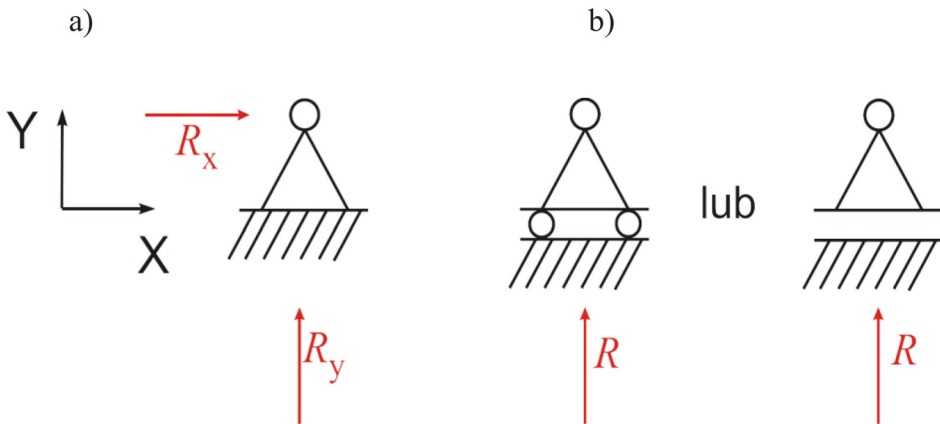
Jeżeli można zaniedbać zjawisko tarcia¹⁰ i wynikające zeń siły styczne, to mówi się o więzach doskonałych (idealnych), których wprowadzenie ułatwia rozwiązywanie wielu zadań statyki, zarówno metodami wykreślnymi, jak też analitycznymi. Typowe przykłady więzów doskonałych omówiono poniżej.

¹⁰ Zagadnienia tarcia omówione zostaną w dalszej części skryptu.

Podpory przegubowe

Na Rys. 6 przedstawiono podpory przegubowe: stałą i przesuwą w ujęciu dwuwymiarowym, oraz towarzyszące im reakcje¹¹.

Podpora przegubowa stała, która pozostawia ciału jedynie możliwość obrotu, odbiera mu w układzie płaskim dwie translacje (wzdłuż osi X oraz Y), wywołując dwie wzajemnie prostopadłe reakcje R_x i R_y ¹².



Rys. 6 Podpory przegubowe i ich reakcje

Z kolei podpora przegubowa przesuwna (rolkowa) nie blokuje ruchu postępowego w jednym kierunku; stąd – pomijając siłę tarcia – otrzymuje się jedną reakcję R , zawsze prostopadłą do kierunku poślizgu¹³. Ułatwia to znacznie rozumowanie podczas rozwiązywania zadań z podporą tego typu.

Pełne utwierdzenie

Ten rodzaj podparcia ciała sztywnego pozbawia go wszystkich możliwości ruchu: w przestrzeni dwuwymiarowej (na płaszczyźnie)

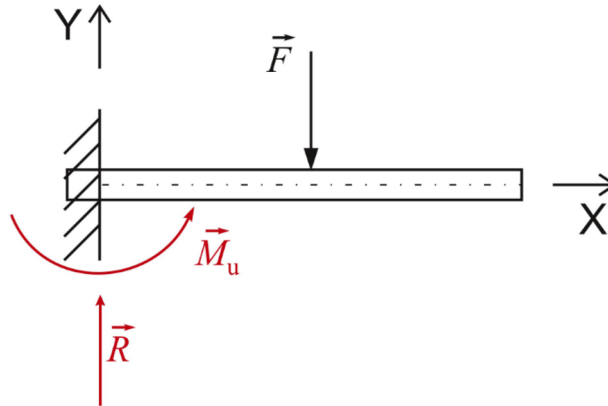
¹¹ Należy pamiętać, że reakcje zastępują działanie więzów, stąd wprowadzając je na rysunkach należałoby usunąć więzy. W praktyce jednak nakłada się reakcje na istniejące rysunki więzów.

¹² Reakcje R_x i R_y można zastąpić jedną reakcją „wypadkową” R , zgodnie z opisaną w dalszej części skryptu tzw. zasadą równoległoboku; w przypadku trójwymiarowym należałoby uwzględnić trzecią składową reakcji R_z .

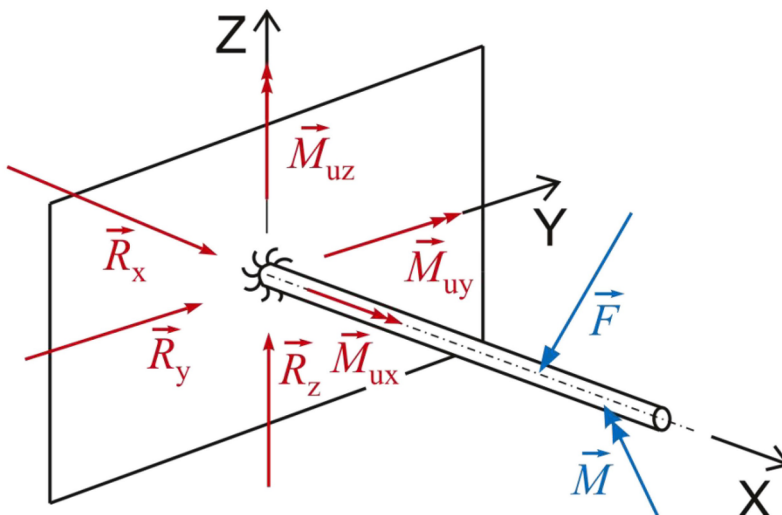
¹³ Podobnie traktuje się oparcie np. pręta o gładką powierzchnię – siła reakcji jest wówczas prostopadła do tej powierzchni, ze względu na brak tarcia.

odebrane są trzy stopnie swobody, stąd oprócz dwu reakcji w postaci sił skupionych pojawia się też moment utwardzenia (Rys. 7a). W przestrzeni trójwymiarowej wystąpiłyby 3 reakcje i 3 momenty utwardzenia względem osi układu odniesienia (Rys. 7b)¹⁴.

a)



b)



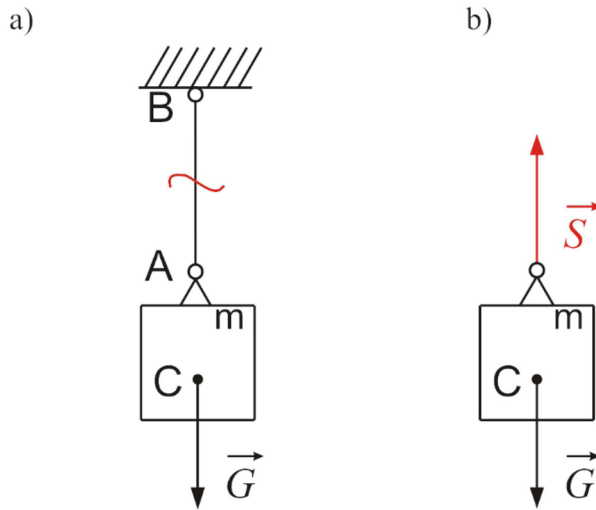
Rys. 7 Pełne utwardzenie belki wspornikowej

¹⁴ Pojęcie momentu siły względem osi zostanie omówione w dalszej części skryptu.

Podwieszenie na cięgnie

Cięgno jest przykładem więzów jednostronnych, gdyż nie może ono przenosić sił wzdłużnych ściskających – może być tylko rozciągane; jest przy tym doskonale wiotkie¹⁵ i nieważkie¹⁶. Przykład zastosowania cięgna przedstawiono na Rys. 8.

Przegubowe zakończenia cięgna w połączeniu z jego wiotkością sprawiają, że cięgno niejako automatycznie ustawia się w linii działającej siły. Aby wyznaczyć reakcję $\vec{S}$ (siłę w cięgnie) należy je myślowo przeciąć¹⁷.



Rys. 8 Cięgno i siła w cięgnie

Przeguby

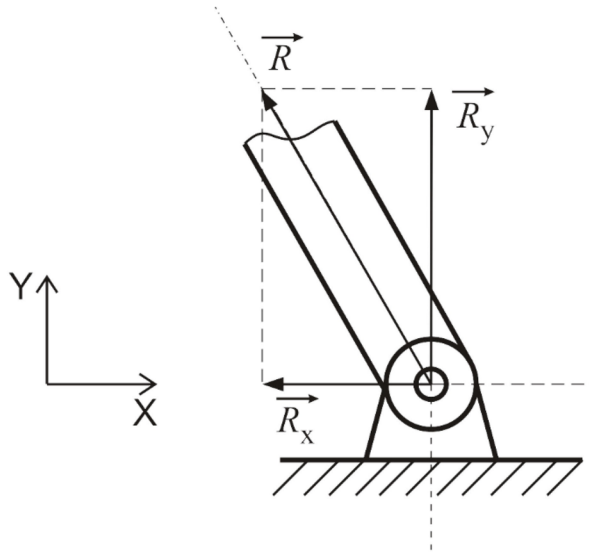
Wśród więzów tego rodzaju wyróżnia się **przegub walcowy** (sworzeń, zawias) oraz **przegub kulowy** (kulisty). W obu przypadkach istotą rzeczy jest to, że linia działania reakcji R przebiega odpowiednio przez środek walca lub kuli (Rys. 9) o ile pominie się tarcie.

¹⁵ Tzn. nie stawia oporu przy zginaniu: za cięgno łatwiej uznać cienką nić niż grubą linę stalową.

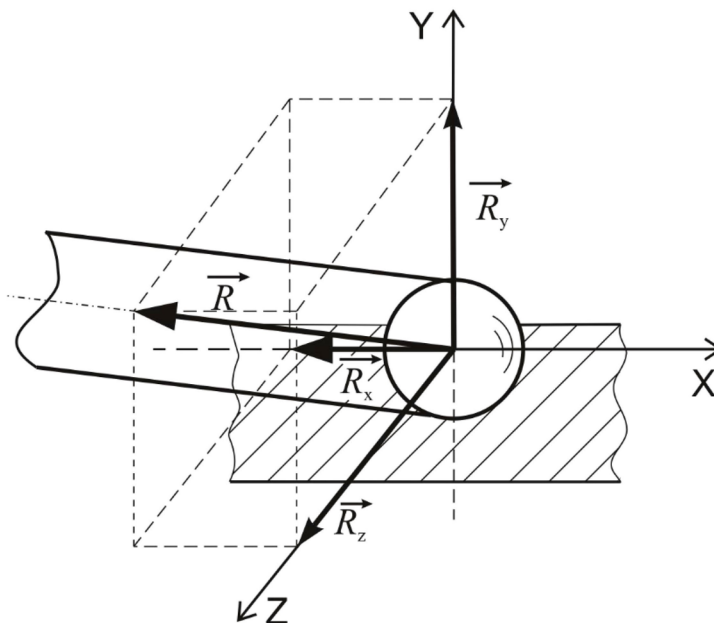
¹⁶ Tzn. nie posiada masy własnej lub jest ona znikoma w porównaniu z masą podwieszonego ciężaru.

¹⁷ Metoda przecięć jest szeroko stosowana w wytrzymałości materiałów do obliczania sił wewnętrznych.

a)



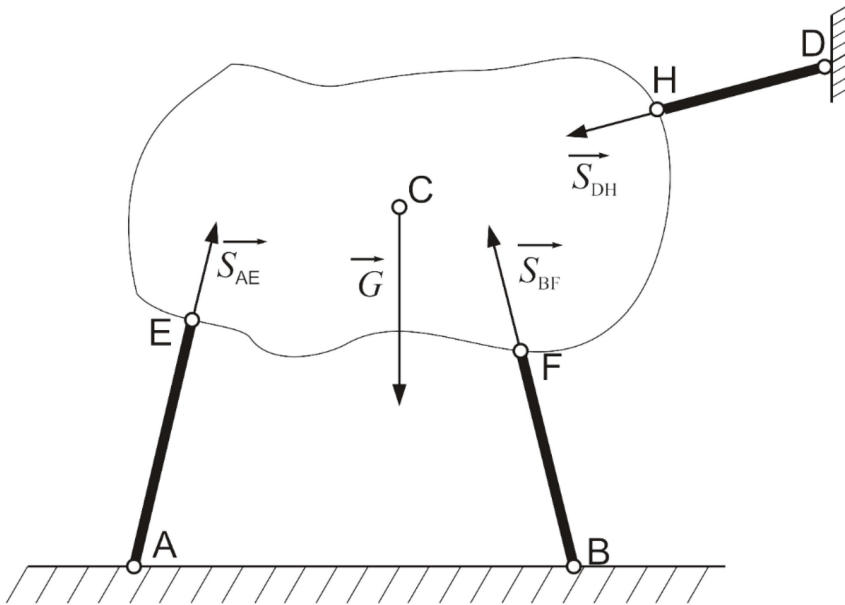
b)



Rys. 9 Reakcje w przegubach

Podparcie na prętach przegubowych

Jak pokazano na Rys. 10, ciało można podeprzeć na prętach zakończonych przegubami¹⁸ doskonałymi. Dzięki temu założeniu można przyjąć, że linie działania odnośnych reakcji podłoża, pokrywają się z osiami prętów, a więc kierunki sił biernych działających na ciało są jednoznacznie określone. Podobnie jak w przypadku podpór przegubowych, ułatwia to rozwiązywanie zagadnień tego typu¹⁹.



Rys. 10 Podparcie ciała sztywnego na prętach przegubowych

Pewniki Statyki

Pewniki (zasady, aksjomaty – z j. gr. axiōma) statyki to założenia, na których opiera się statyka, a których słuszność jest oczywista.

¹⁸ Zasadniczo powinny to być przeguby kulowe, tak aby pręt mógł się odchylać w każdą stronę.

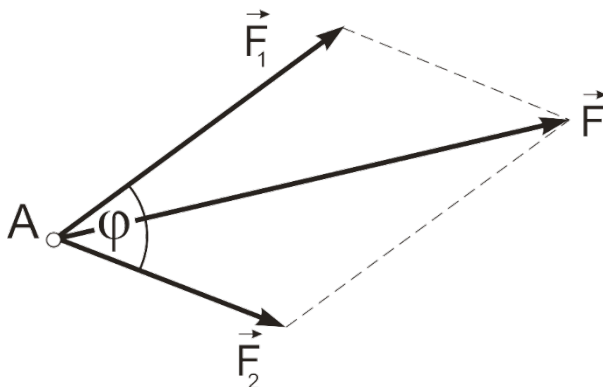
¹⁹ W niektórych zagadnieniach dwuwymiarowych można zastąpić podporę przegubową przesuwą prętem przegubowym – liczba stopni swobody będzie taka sama, tzn. jedna możliwość obrotu i jedno przemieszczenie.

Pewnik 1. (zasada równoległoboku)

Skutek działania dwu sił skupionych $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ na dany punkt materialny jest taki sam, jak skutek działania ich wektora głównego (wypadkowej)²⁰ $\vec{F}$, zobrazowanego przekątną równoległoboku zbudowanego na danych siłach (Rys. 11), przy czym wektor główny musi być również przyłożony do rozważanego punktu materialnego²¹.

Zależność wektorową pomiędzy siłami $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, a ich wektorem głównym $\vec{F}$ można zapisać następująco:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1.2)$$



Rys. 11 Równoległobok sił przyłożonych do punktu materialnego

Zapis wektorowy ma tę niezaprzeczalną zaletę, że wzór jest zawsze słuszny, niezależnie od kierunku wektorów sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Chcąc jednak obliczyć wartość wektora głównego tych sił, niezależnie od wartości kąta między nimi, należy użyć następującego wyrażenia skalarnego:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \psi}, \quad (1.3)$$

²⁰ Wektor główny oznacza sumę geometryczną (wektorową) wszystkich sił układu, zaś wypadkowa to siła dająca identyczne skutki (ruch, reakcje) jak dany układ sił. Jak to wyjaśniono dalej omawiając zagadnienia redukcji układów sił, można utożsamić wypadkową z wektorem głównym w przypadku sił zbieżnych, co ma miejsce w bieżącym przypadku.

²¹ Druga przekątna równoległoboku obrazuje różnicę wektorów $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.

które wyprowadza się z tw. cosinusów, opierając się na Rys. 12. Gwoli przypomnienia: twierdzenie to można wyrazić za pomocą wzoru:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}, \quad (1.4.)$$

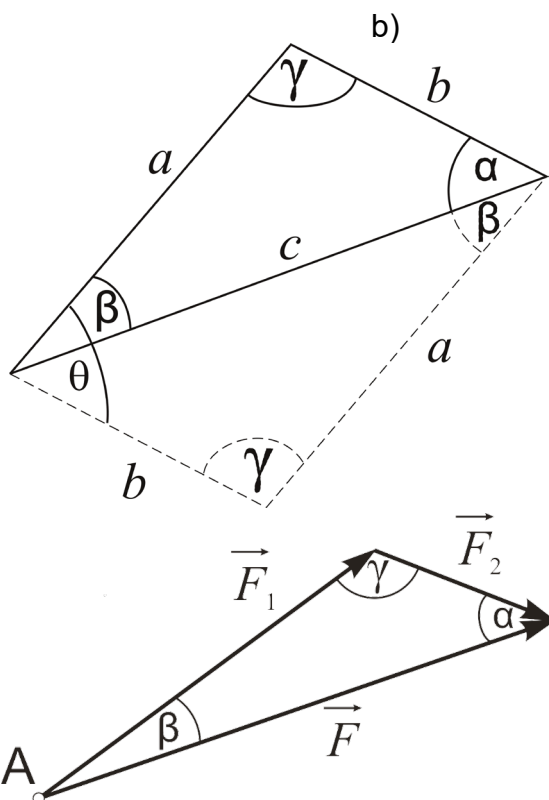
Czytelnik łatwo sprawdzi, że w przypadku, gdy siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ są równoległe (zgodnie lub przeciwnie zwrócone, por. Rys. 13), wzór upraszcza się do odpowiedniej postaci:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1.5.)$$

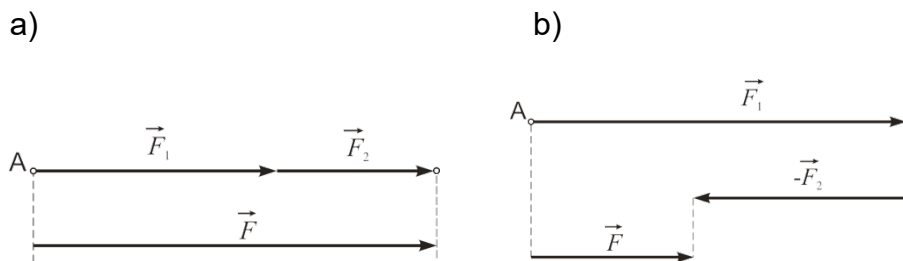
lub

$$\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \quad (1.6.)$$

a)



Rys. 12 Zastosowanie tw. cosinusów do obliczenia wartości wypadkowej



Rys. 13 Szczególne przypadki działania sił F_1 i F_2 – układ równoległy

Pewnik 2.²²

Dwie siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ przyłożone do ciała materialnego równoważą się tylko mając tę samą linię działania²³ i równe wartości, a przeciwne zwroty (Rys. 14).

Przypadek taki (Rys. 14) można opisać kolejno za pomocą wyrażenia wektorowego oraz skalarne: wektory sił mają przeciwne zwroty, ale siły są równe co do wartości, co doskonale ukazują różnica obu form zapisu:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (1.7)$$

ale

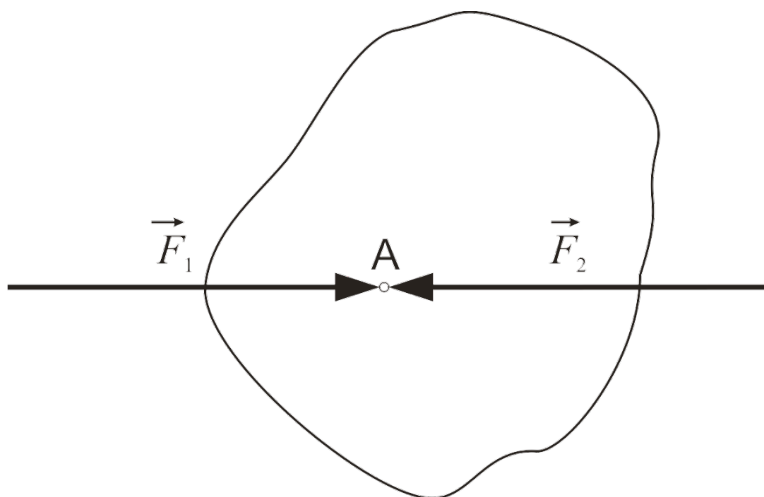
$$F_1 = F_2 \quad (1.8)$$

Wynika stąd, że wektor główny danych sił jest wektorem zerowym $\vec{F} = \vec{0}$ ²⁴ (o zerowej długości).

²² Por. III. Prawo Newtona

²³ Użycie sformułowania „ten sam kierunek” byłoby mniej precyzyjne, ze względu na możliwość występowania pary sił – zob. dalsze rozdziały skryptu.

²⁴ Pominięcie strzałki w tym wypadku byłoby błędem formalnym, gdyż nie można porównywać wielkości wektorowej (opisywanej przez trzy liczby) ze skalarą w formie liczby 0.



Rys. 14 Równowaga dwóch sił o przeciwnych zwrotach

Pojawia się tu pojęcie układu sił równoważących się, czyli tzw. **układu zerowego**, które pojawi się w treści kolejnego aksjomatu statyki.

Pewnik 3.

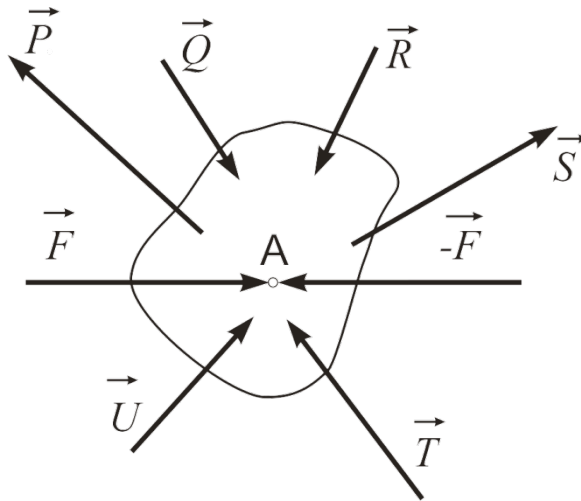
Skutek działania dowolnego układu²⁵ sił na ciało materialne nie zmienia się, jeśli do tego układu zostanie dodany lub od niego odjęty układ zerowy.

Przykład takiego działania przedstawiono na Rys. 15. Najprostszym układem zerowym jest układ dwóch sił współliniowych, o przeciwnych zwrotach (por. pewnik 2), którym można się posłużyć, aby udowodnić twierdzenie, że wektor siły można dowolnie przesuwąć wzdłuż jej linii działania.

Niech zastanymy układem sił działającym na ciało materialne będzie pojedyncza siła $\vec{Q}$ ²⁶, przyłożona w punkcie A (Rys. 16a). Do ciała można przyłożyć dodatkowo zerowy układ sił w punkcie B, nie zmieniając jednak skutków działania istniejącego układu. Można przy tym wybrać pewien szczególny układ zerowy, tzn. taki, który składa się z dwu przeciwnie zwróconych sił $\vec{Q}$ i $-\vec{Q}$ (Rys. 16b), o linii działania pokrywającej się z wektorem pierwotnie istniejącej siły $\vec{Q}$,

²⁵ Układ ten nie musi być w równowadze.

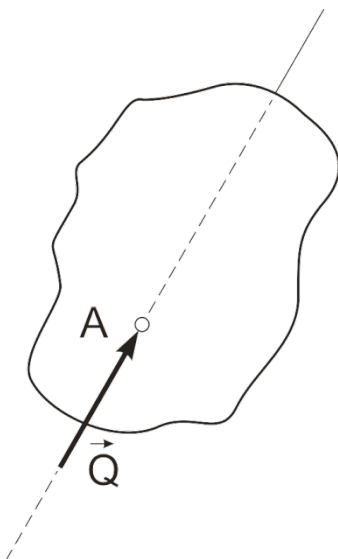
²⁶ Siła ta może być wypadkową pewnego układu wielu sił.



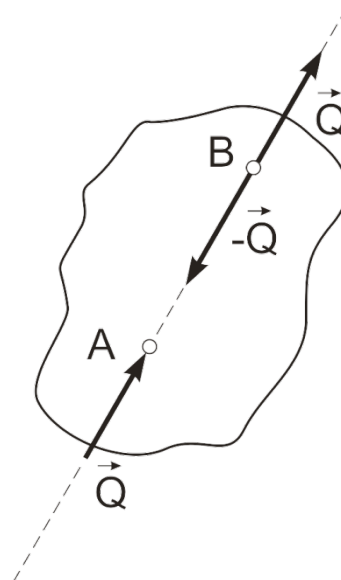
Rys. 15 Dodanie lub odjęcie układu zerowego do istniejącego układu sił

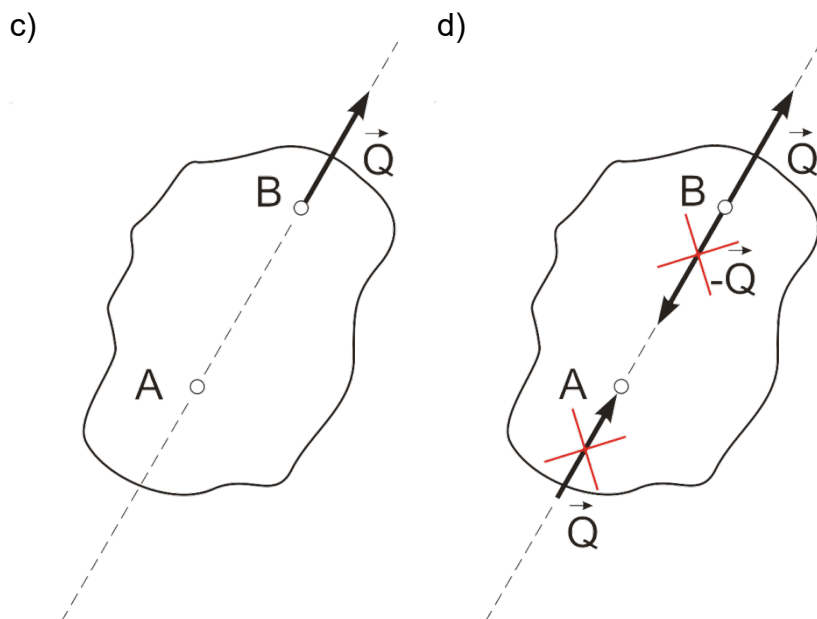
tak aby linia działania wszystkich rozważanych sił przechodziła przez punkty A i B . Następnie, pamiętając że skutek działania układu sił nie zmienił się i pozostanie niezmienny po odjęciu dowolnego układu zerowego, należy usunąć jednocześnie siłę $\vec{Q}$ przyłożoną w punkcie A

a)



b)





Rys. 16 Dowód wykreślny na możliwość przesuwania wektora siły wzdłuż kierunku działania

oraz siłę $-\vec{Q}$ z punktu B, które są w równowadze i stanowią także układ zerowy (Rys. 16c). Po wykonaniu tego działania otrzymuje się przypadek ciała przedstawiony na Rys. 16d, który od Rys. 16a różni się jedynie tym, iż siła $\vec{Q}$ została przesunięta z punktu A do punktu B wzdłuż kierunku jej działania. Nie miało to jednak żadnego wpływu na zachowanie się ciała materialnego pod działaniem układu sił – co należało udowodnić.

W związku z powyższym wektor siły ma w mechanice miano **wektora posuwnego** lub **wektora ślizgającego się**, a każdą siłę przyłożoną do ciała sztywnego można przesuwać wzdłuż jej linii działania.

Pewnik 4. (zasada zeszytnienia)

Jeżeli układ sił działających na ciało materialne odkształcalne jest zrównoważony, to przyjęcie założenia o doskonałej sztywności tego ciała nie naruszy równowagi danego układu sił²⁷.

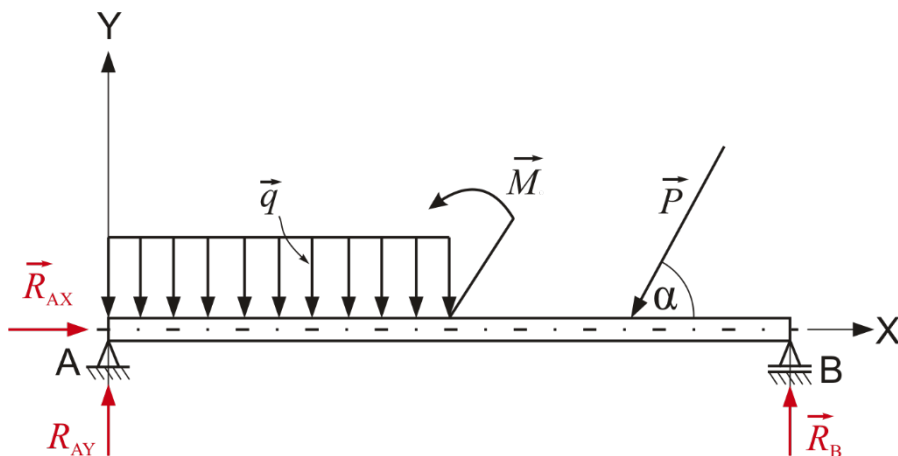
²⁷ Założenie to jest w pewnym sensie kluczowe dla statyki i umożliwia rozwiązywanie wielu zagadnień równowagi ciał pod działaniem sił zewnętrznych. Pojawia się jednak skutek tego pewna grupa zagadnień, tzw. statycznie

Pewnik 5. (zasada akcji i reakcji)

Każdej sile zewnętrznej czynnej, działającej na ciało materialne, odpowiada siła zewnętrzna bierna – reakcja, mająca tę samą wartość i linię działania, lecz przeciwny zwrot²⁸ (Rys. 17).

Pewnik 6. (zasada uwolnienia od więzów)

Każde ciało nieswobodne²⁹ można myślowo uwolnić od więzów, zastępując ich działanie odpowiednimi reakcjami³⁰, a następnie rozpatrywać je jako ciało swobodne, poddane działaniu sił zewnętrznych czynnych i biernych (reakcji więzów).



Rys. 17 Siły zewnętrzne czynne i bierne

niewyznaczalnych, których nie można rozwiązać na gruncie mechaniki ciała sztywnego tzn. nie da się wyznaczyć wszystkich skutków działania danego układu sił w postaci sił zewnętrznych biernych, czyli reakcji. Zagadnieniami statycznie niewyznaczalnymi zajmuje się wytrzymałość materiałów, oparta na mechanice ciał odkształcalnych, która – poza możliwością wyznaczenia „nadmiarowych” reakcji - pozwala też na obliczenie tzw. sił wewnętrznych.

²⁸ W większości podręczników z Mechaniki ogólnej pewnik 5. podawany jest w formie tzw. zasady działania i przeciwdziałania, np.: „każdemu działaniu towarzyszy równe co do wartości, o przeciwnym zwrocie i leżące na tej samej prostej przeciwdziałanie” (por. też III. prawo Newtona). Autor niniejszego skryptu zaproponował jednak podaną wyżej formę aksjomatu 5., która wydaje się być bliższa zagadnieniom równowagi sił, będących przedmiotem statyki.

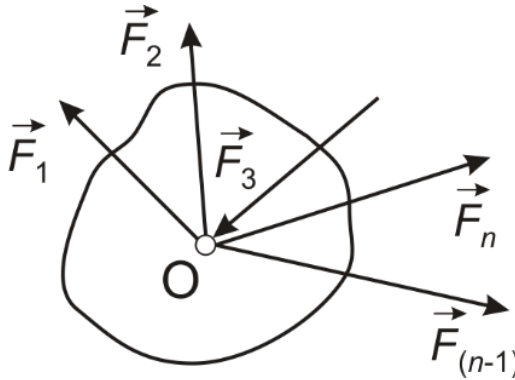
²⁹ To znaczy takie, któremu odebrano niektóre lub wszystkie stopnie swobody.

³⁰ Nie zmieniając przy tym stanu równowagi ciała.

2. Płaskie układy sił

2.1. Płaski zbieżny układ sił

Płaski zbieżny układ sił składa się z sił działających w jednej płaszczyźnie, których linie działania³¹ przecinają się wszystkie w jednym punkcie (Rys. 18).



Rys. 18 Płaski zbieżny układ sił

Siły płaskiego zbieżnego układu sił można dodawać wektorowo w celu wyznaczenia **wektora głównego**, będącego sumą geometryczną wszystkich sił układu:

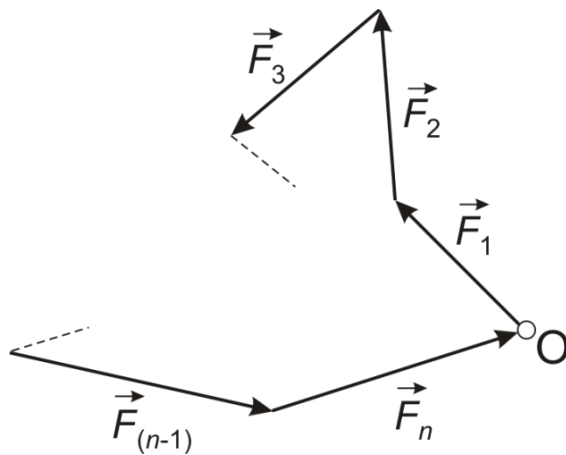
$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad (1.9)$$

Wektor główny układu sił można też wyznaczyć wykreślnie, tworząc wielobok sił³², przy czym kolejność dodawania sił nie ma znaczenia (Rys. 19). Linia działania wektora głównego przechodzi przez punkt zbieżności układu sił³³.

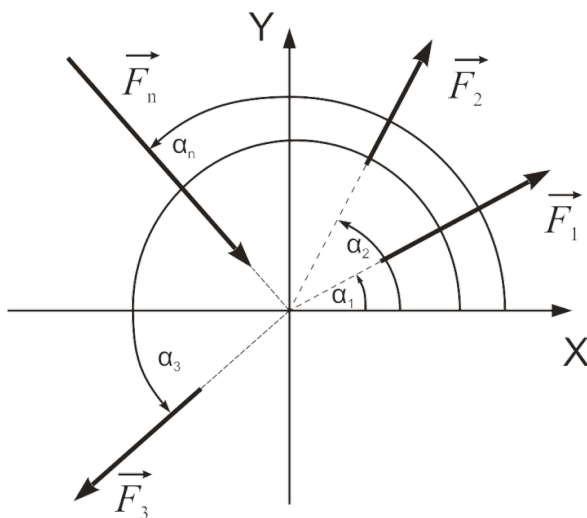
³¹ Należy pamiętać, że każda siła, jako wektor posuwany (por. pewnik 3), może być przesuwna wzdłuż jej linii działania.

³² Wielobok ten nie jest fizycznym układem sił, ale abstrakcyjnym zbiorem przesuniętych równolegle wektorów, odzwierciedlających dane siły, utworzonym na potrzeby operacji sumowania; siła fizyczna nie może być bowiem przesuwna równolegle bez zmiany równowagi układu.

³³ W literaturze można znaleźć stwierdzenie, że wektor główny jest przyłożony do punktu zbieżności, które nie jest precyzyjne w świetle pewnika 3.



Rys. 19 Wielobok sił i wektor główny



Rys. 20 Zastosowanie tw. o rzucie wypadkowej

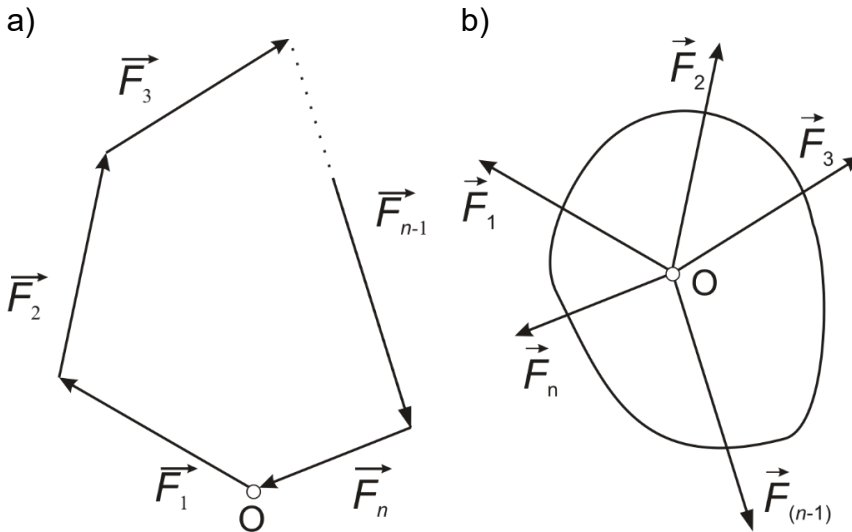
**WAŻNE**

Twierdzenie o rzucie wypadkowej³⁴: Rzut wektora głównego układu sił na dowolną oś, równa się sumie rzutów poszczególnych sił układu na tę oś.

2.2. Równowaga płaskiego zbieżnego układu sił

Płaski układ sił zbieżnych $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ pozostaje w równowadze wtedy i tylko wtedy, gdy wielobok sił układu jest zamknięty (Rys. 21), tzn. gdy wektor główny układu jest wektorem zerowym³⁵:

(1.10)



Rys. 21 Płaski układ sił w równowadze

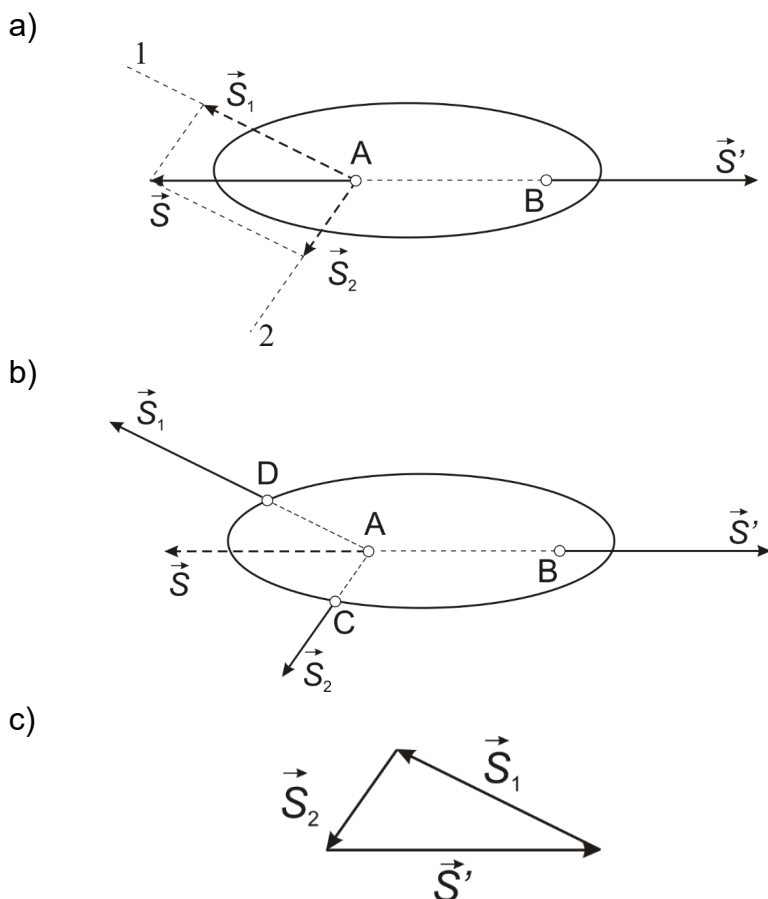
³⁴ Jest to nazwa tradycyjna tego twierdzenia; w istocie chodzi o rzut wektora głównego, który tylko w układach zbieżnych jest tożsamy z wypadkową.

³⁵ Innymi słowy: wielobok sił zaczyna się i kończy w tym samym punkcie O.

Z podanego wyżej warunku wektorowego (geometrycznego) można wyprowadzić dwa skalarne równania równowagi płaskiego zbieżnego układu sił w postaci:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad (1.11)$$

stosując twierdzenie o rzucie wypadkowej. Równania te muszą być spełnione oba jednocześnie, aby uwzględnić przypadki szczególne, takie jak równoległość niezerowego wektora głównego do jednej z osi układu odniesienia; jedno z równań byłoby wówczas spełnione, ale układ nie byłby w równowadze.



Rys. 22 Ilustracja twierdzenia o trzech siłach

Można wykazać, że trzy siły nierównoległe działające w jednej i tej samej płaszczyźnie mogą pozostawać w równowadze, a więc tworzyć układ zerowy. Należy przy tym skorzystać z odwróconej zasady równoległoboku (pewnik 1) i rozłożyć jedną z równoważących się sił $\vec{S}$ i $\vec{S}'$ na dwa kierunki (zob. Rys. 22). Widać wówczas, że uzyskane siły $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ również tworzą układ zerowy z siłą $\vec{S}' = -\vec{S}$. Oczywiście siły te muszą tworzyć zamknięty wielobok sił, którym jest w tym wypadku trójkąt. Te spostrzeżenia można podsumować tzw. **twierdzeniem o trzech siłach**:



WAŻNE

Trzy siły wzajemnie (parami) nierównoległe (zbieżne) działające na punkt materialny w jednej i tej samej płaszczyźnie pozostają w równowadze, o ile ich wektory tworzą zamknięty trójkąt.

3. Tarcie

Tarciem nazywa się zjawisko występowania sił stycznych³⁶ na powierzchni styku ciała z podłożem (Rys. 23).

Zjawisko to występuje zarówno w czasie spoczynku ciała (tarcie statyczne), gdy przyłożona doń siła jest zbyt mała aby pokonać opór ruchu, jak też w czasie ruchu ciała (tarcie kinetyczne) po pokonaniu pewnej granicznej siły oporu statycznego. Przy czym opór w warunkach ruchu jest mniejszy niż w spoczynku. Tarcie można podzielić ze względu na sposób realizacji ruchu nieswobodnego ciała, na tarcie ślizgowe, w tym tarcie cięgien, oraz tarcie toczne.

³⁶ W przypadku oporów toczenia, oprócz siły stycznej (T), określonej prawami tarcia, występuje też pewien moment oporu związany z przesunięciem reakcji normalnej (N) podłoża.

3.1. Tarcie ślizgowe

Prawa tarcia Coulomba-Morena

I

Wartość siły tarcia nie zależy od wielkości powierzchni styku ciała z podłożem lub innym ciałem, a zależy tylko od ich rodzaju.

II

Wartość spoczynkowa siły tarcia ślizgowego, ciała poddanego działaniu sił zewnętrznych, może zmieniać się od zera do pewnej wartości maksymalnej (granicznej), proporcjonalnej do całkowitego nacisku normalnego:

$$T_s \leq \mu_s N = T_{\text{maks}} \quad (1.12)$$

Współczynnik proporcjonalności μ_s nazywa się **współczynnikiem tarcia statycznego**.

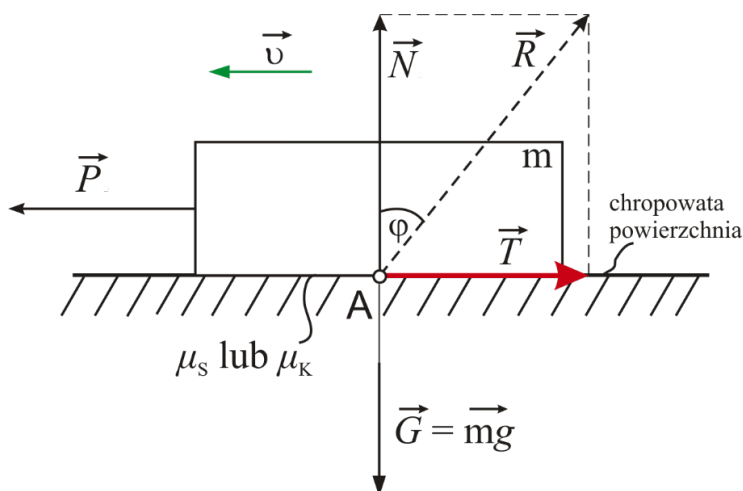
III

Po przekroczeniu granicznej wartości (T_{maks}) przez siłę tarcia T_s , rozpoczyna się ruch nieswobodny ciała³⁷, przy czym siła tarcia jest zawsze zwrócona przeciwnie do wektora prędkości, a jej wartość jest mniejsza od wartości granicznej.

Wzór pozostaje w mocy, po zastąpieniu statycznego współczynnika tarcia (μ_s) przez **współczynnik tarcia kinetycznego** μ_k :

$$T_k \leq \mu_k N = T_{\text{maks}} \quad (1.13)$$

³⁷ Więcej na ten temat w Części II. skryptu.



Rys. 23 Ciało na chropowatej powierzchni

Zarówno siłę tarcia ($\vec{T}_s, \vec{T}_k$ - ogólnie $\vec{T}$) jak i siłę nacisku normalnego $\vec{N}$, należy postrzegać, jako dwie składowe (styczną i normalną) całkowitej siły $\vec{R}$ oporu, jaki napotyka ciało wprawiane w ruch³⁸. Ponieważ siły zewnętrzne mogą wymuszać ruch w dowolnym kierunku prostopadłym do normalnej do podłoża n (Rys. 24), wektor siły $\vec{R}$ musi znajdować się wewnątrz stożka o wierzchołku w punkcie zbieżności sił (A) i o kącie wierzchołkowym 2ρ , którego pobocznica pokrywa się kierunkiem wektora siły oporu o wartości maksymalnej $\vec{R}_{\text{maks}}$ (Rys. 24).

Wartość kąta ρ [rad] wynika wprost z zależności:

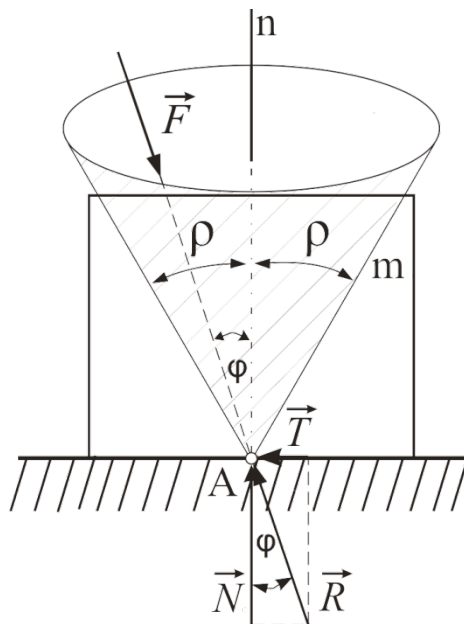
$$\operatorname{tg} \rho = \frac{T_{\text{maks}}}{N} \quad (1.14)$$

a porównanie jej ze wzorem pozwala zapisać:

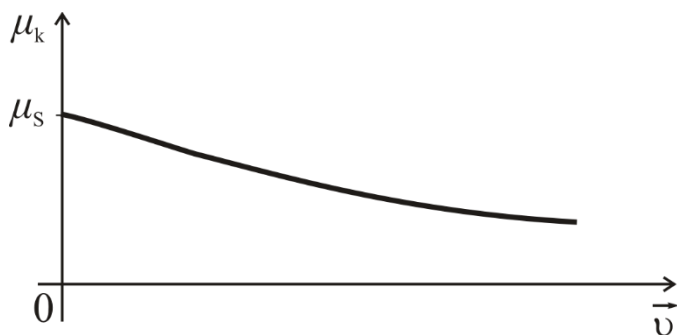
$$\rho = \operatorname{arctg} \mu \quad (1.15)$$

³⁸ Zagadnienia tarcia ślizgowego rozpatruje się jako przypadki równowagi zbieżnych układów sił, tak jakby rozważane ciała miały znikome wymiary (punkty materialne), mimo iż na schematach obliczeniowych widoczne są przedmioty o znacznych wymiarach. Wynika to ze stopnia uproszczenia obiektów rzeczywistych, których dotyczą rozważania.

Dlatego też kąt ρ nosi nazwę **kąta tarcia**.



Rys. 24 Stożek tarcia



Rys. 25 Wykres zmian współczynnika tarcia kinetycznego
w funkcji prędkości ruchu ciała

Jak wyżej wspomniano, siła oporu tarcia maleje po wprowadzeniu ciała w ruch. Jest to związane z faktem zmniejszania się wartości współczynnika tarcia ($\mu_k < \mu_s$) ze wzrostem prędkości ruchu (Rys. 25).

W tabeli 1 zebrano przykładowe wartości współczynników tarcia dla różnych materiałów (par kinematycznych).

Tabela 1 Typowe wartości współczynników tarcia dla różnych par kinematycznych

Para kinematyczna	Współczynnik tarcia statycznego μ_s []	Współczynnik tarcia kinetycznego μ_k []
skóra naturalna drewno	0,5 – 0,6	0,3 – 0,5
skóra naturalna metal	0,3 – 0,5	0,3
żeliwo żeliwo ³⁹	0,22	0,1
stal żeliwo ⁴⁰	0,16	0,1
stal żeliwo ⁴¹	0,02	
stal lód	0,03	0,015

3.2. Tarcie cięgien



WAŻNE

Zagadnienie **tarcia cięgien** jest szczególnym przypadkiem tarcia ślizgowego pomiędzy cięgnem (lina, sznur, pas itp.) a powierzchnią walcową (bęben, koło pasowe, drążek etc.), dla którego stosuje się wzór Eulera w postaci:

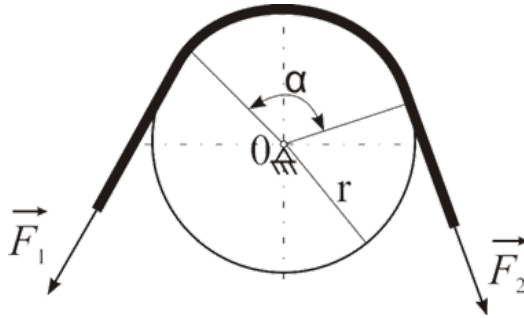
$$F_2 = F_1 e^{\mu_s \alpha} \quad (1.16)$$

przy czym $F_2 > F_1$, tzn. poślizg cięgna nastąpiłby w stronę wskazywaną przez zwrot $\vec{F}_2$ (Rys. 26), zaś α to tzw. **kąt opasania**, podawany w radianach; współczynnik tarcia statycznego μ_s występujący w powyższym równaniu sugeruje, że układ cięgno – walec znajduje się w równowadze statycznej (w spoczynku) – istotnie, wzór ten opisuje przypadek graniczny, tuż przed poślizgiem.

³⁹ po zgrubnej obróbce, bez smarowania

⁴⁰ bez smarowania

⁴¹ żeliwo szlifowane, dokładne smarowanie



Rys. 26 Układ sił w przypadku tarcia ciągłego o powierzchnię walcową

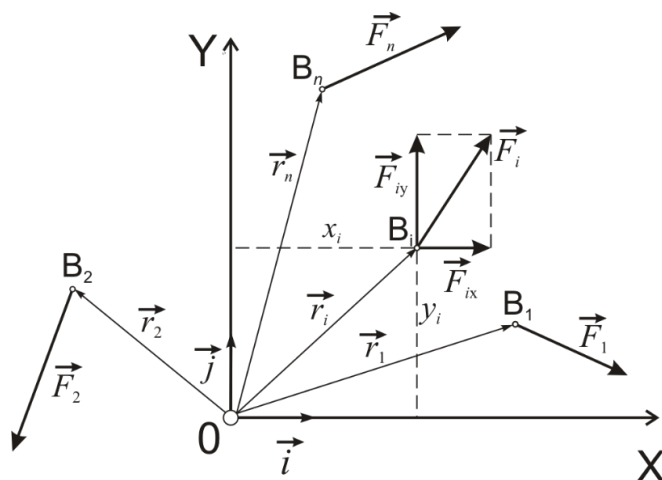
4. Dowolny płaski układ sił



WAŻNE

Dowolny płaski układ sił jest to układ sił działających w jednej płaszczyźnie, których linie działania nie przecinają się wszystkie w jednym punkcie (Rys. 27).

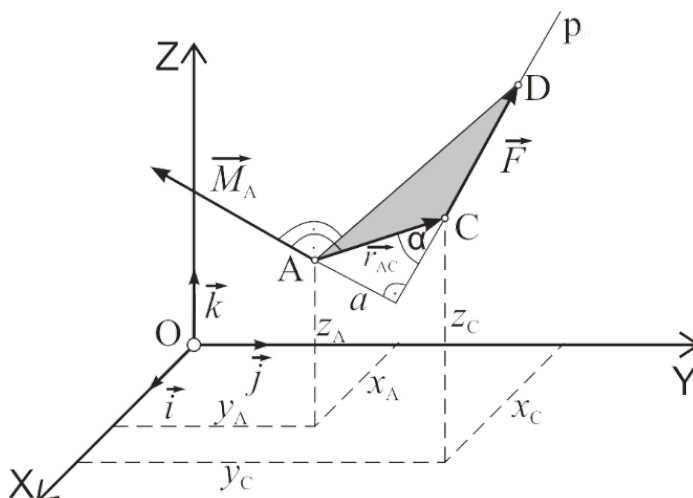
W szczególnym przypadku wektor główny (suma geometryczna) sił takiego układu może być wektorem zerowym, a mimo to układ może nie znajdować się w równowadze, ze względu na występowanie w nim co najmniej jednej pary sił i związanych z nimi momentów. W innym szczególnym przypadku układ taki może być płaskim układem sił równoległych. Konieczne jest w tym miejscu zdefiniowanie kilku dodatkowych pojęć.



Rys. 27 Dowolny płaski układ sił

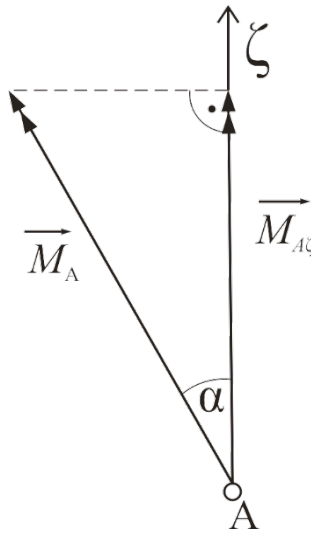
Momentem siły względem dowolnie obranego punktu A (biegu-na), nazywa się iloczyn wektorowy promienia-wektora wskazującego w przyjętym układzie odniesienia położenie początku⁴² wektora siły oraz tegoż wektora siły (Rys. 28).

$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.17)$$



Rys. 28 Moment siły względem punktu

⁴² Może to być także dowolny inny punkt leżący na linii działania siły.



Rys. 29 Moment siły względem osi

Tak zdefiniowany moment siły względem punktu, jest wielkością wektorową, związaną z obranym biegunem; wartość momentu można obliczyć korzystając z właściwości iloczynu wektorowego, albo z następującej zależności:

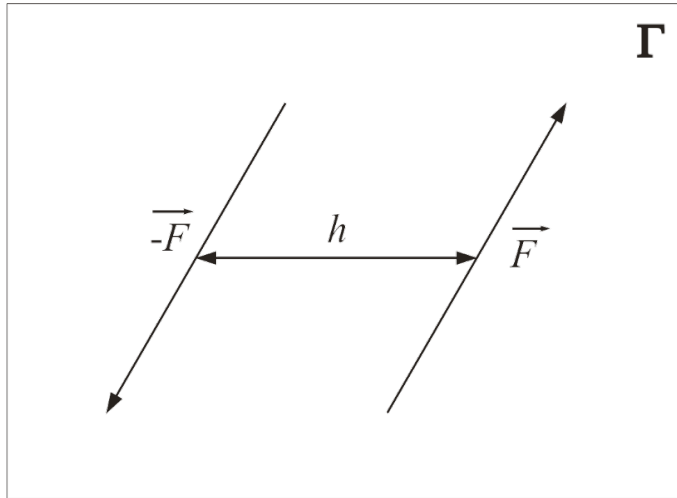
$$M = aF \quad (1.18)$$

gdzie a to odległość punktu A od linii działania wektora siły $\vec{F}$. Czytelnik z łatwością udowodni zależność $a = r \sin \alpha$ (odległość punktu A od prostej p).

Momentem $\vec{M}_A$ siły $\vec{F}$ względem dowolnej osi ζ przechodzącej przez punkt A, nazywa się rzut wektora momentu $\vec{M}_A$ siły $\vec{F}$ względem punktu A, na tę oś (Rys. 29).

Para sił jest to układ dwóch sił o tej samej wartości (długości) i o równoległych liniach działania, ale przeciwnych zwrotach (Rys. 30).

Odległość h pomiędzy liniami działania sił nazywa się **ramieniem pary sił**.

Rys. 30 Para sił na płaszczyźnie Γ

W przypadku ogólnym pojedyncza para sił jest układem niezrównoważonym⁴³, którego działanie jest charakteryzowane przez tzw. moment pary sił. Para sił działających na ciało sztywne usiłuje bowiem obracać ciało, co skutkuje brakiem równowagi statycznej, o ile para ta nie zostanie zrównoważona odpowiednim momentem o przeciwnym zwrocie.

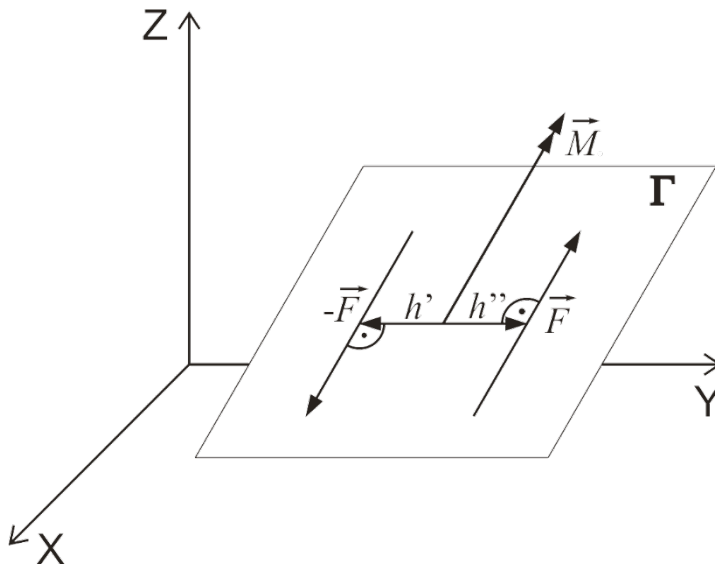
Momentem pary sił nazywa się wektor osiowy, równy sumie momentów obu sił względem dowolnego bieguna, prostopadły do płaszczyzny działania pary, o zwrocie zgodnym z regułą prawej dłoni⁴⁴.

Na Rys. 31 przedstawiono przykład pary sił działającej w płaszczyźnie Γ i odpowiadający jej moment ($\vec{M}$) – prostopadły do tej płaszczyzny. Wektor momentu pary sił jest tzw. **wektorem swobodnym**, tzn. może być przyłożony w dowolnym punkcie⁴⁵ na płaszczyźnie działania pary sił, o ile tylko pozostanie do niej prostopadły. Można też przemieszczać wektor momentu wzdłuż jego linii działania – jest wektorem posuwnym, tak samo jak siła skupiona.

⁴³ Według niektórych podręczników, para sił może być układem zrównoważonym (zerowym) w pewnym szczególnym przypadku – jeżeli linie działania obu sił pary pokrywają się. Zdaniem Autora niniejszego skryptu nie można jednak wtedy mówić o parze sił, gdyż nie istnieje ramię pary.

⁴⁴ Spotykane jest też określenie „reguła śruby prawoskrętnej”, które jest poprawne, o ile chodzi o wkręcanie takiej śruby – tak aby zwrot wektora był właściwy.

⁴⁵ Z tego powodu wektora $\vec{M}$ nie opatrzono żadnym indeksem.



Rys. 31 Moment pary sił działającej w płaszczyźnie Γ jako wektor swobodny

Dowolność wyboru punktu przyłożenia wektora momentu wynika z Rys. 31, na którym pokazano, że podział ramienia pary sił w dowolnej proporcji pomiędzy obie siły nie zmienia całkowitej wartości momentu tej pary⁴⁶, w myśl równania:

$$M = h'F + h''F = (h' + h'')F = hF \quad (1.19)$$

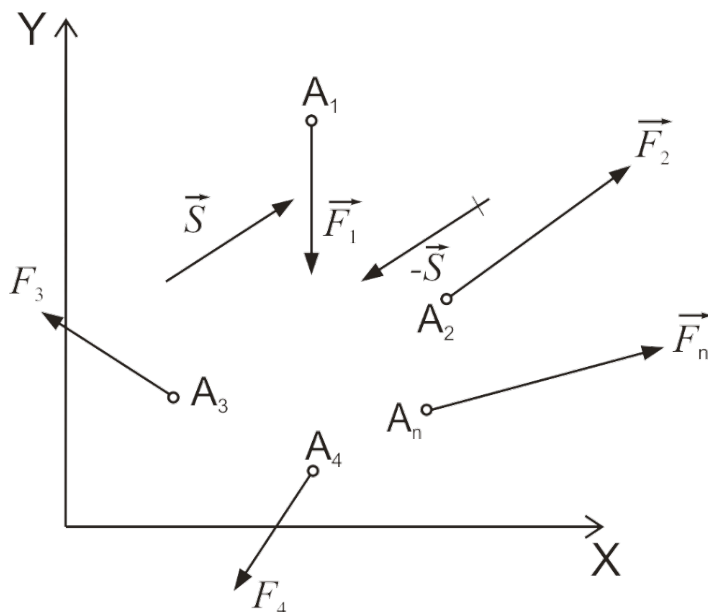
Pary sił o jednakowych momentach są sobie równoważne.

4.1. Redukcja płaskiego dowolnego układu sił

Ogólnie rzecz ujmując, **redukcja**⁴⁷ oznacza zastąpienie jednego układu sił innym układem równoważnym, tzn. powodującym te same skutki (ruch, reakcje), ale złożonym z mniejszej liczby sił, a najlepiej z jednej siły zwanej **wypadkową**.

⁴⁶ Wartość momentu pary sił nie zmieni się nawet wtedy, gdy za biegun przyjmie się dowolny punkt na płaszczyźnie Γ , nie leżący pomiędzy liniami działania obu sił.

⁴⁷ Zagadnienie redukcji zostanie szerzej omówione w kolejnym podrozdziale, dotyczącym przestrzennego dowolnego układu sił.



Rys. 32 Dowolny płaski układ sił

Dowolny płaski układ sił (Rys. 32) można zredukować do wektora głównego (sumy geometrycznej wszystkich sił układu, $\vec{F}$), przyłożonego w tzw. biegunie redukcji O, i momentu głównego ($\vec{M}_O$) wszystkich sił układu względem tegoż bieguna, przy czym moment główny jest prostopadły do płaszczyzny działania sił układu.

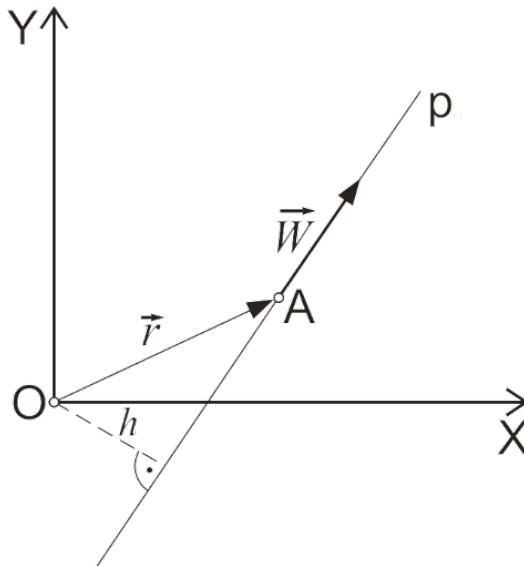
Wypływa stąd wniosek, że płaski dowolny układ sił można zredukować do samej tylko siły wypadkowej $\vec{W}$, o wartości równej wektorowi głównemu, pod warunkiem odsunięcia linii działania wypadkowej na odległość h od bieguna O (Rys. 33), tak aby spełniona była zależność:

$$\vec{r} \times \vec{W} = \vec{M}_O, \quad (1.20)$$

a w zapisie skalarnym:

$$h \cdot W = M_O \quad (1.21)$$

Wielkość h jest więc swoistym ramieniem wypadkowej, pozwalającym jej zastąpić działanie momentu głównego.



Rys. 33 Wypadkowa płaskiego dowolnego układu sił

4.2. Równowaga płaskiego dowolnego układu sił



WAŻNE

Warunkiem równowagi płaskiego dowolnego układu sił jest jednoczesne zerowanie się sumy geometrycznej sił – wektora głównego, jak też momentu głównego układu.

Moment główny płaskiego dowolnego układu sił jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny działania sił, a ponieważ jego wartość w stanie równowagi wynosi zero, można w tym szczególnym przypadku zapisać sumę momentów (M) względem dowolnego punktu

na płaszczyźnie działania sił, dlatego też drugie z poniższych równań ma formę skalarną:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \wedge \quad M = \sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad (1.22)$$

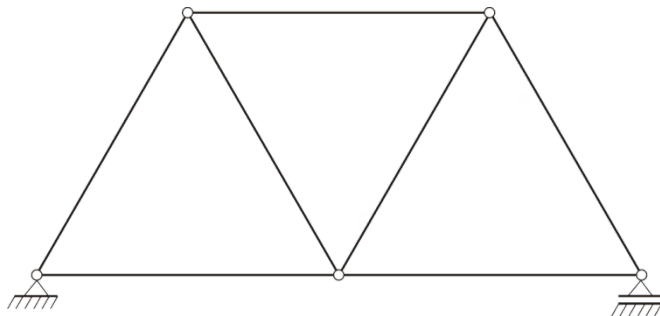
Z powyższych równań wektorowych wynikają trzy równania skalarnie w postaci:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n M_i = 0, \quad (1.23)$$

Zamiast podanego układu równań, można posłużyć się układem dwóch równań momentów względem różnych biegunów oraz jednym równaniem rzutów sił na oś, przy czym oś ta nie może być prostopadła do odcinka łączącego bieguny (wówczas równania momentów byłyby tożsame). Kolejną możliwością jest wykorzystanie trzech równań momentów względem biegunów nie leżących na jednej prostej. Dzięki tym trzem możliwościom zapisu równań równowagi dowolnego płaskiego układu sił, zadania rozwiązane z użyciem jednego układu równań można sprawdzić za pomocą kolejnego równania, zaczerpniętego z drugiego lub trzeciego układu.

5. Kratownice płaskie

Kratownica to układ prętów połączonych przegubowo (Rys. 34).



Rys. 34 Przykład kratownicy płaskiej

Rozwiązać kratownicę znaczy obliczyć siły we wszystkich jej prętach. Warunkiem statycznej wyznaczalności⁴⁸ kratownicy jest spełnienie warunku:

$$p = 2w - 3, \quad (1.24)$$

gdzie p to liczba prętów, zaś w – liczba węzłów (przegubów).

Pręt w kratownicy może być jedynie **rozciągany**, bądź ściskany, gdyż **obciążenia** są przykładane **jedynie w węzłach**.

5.1. Metody rozwiązywania kratownic płaskich

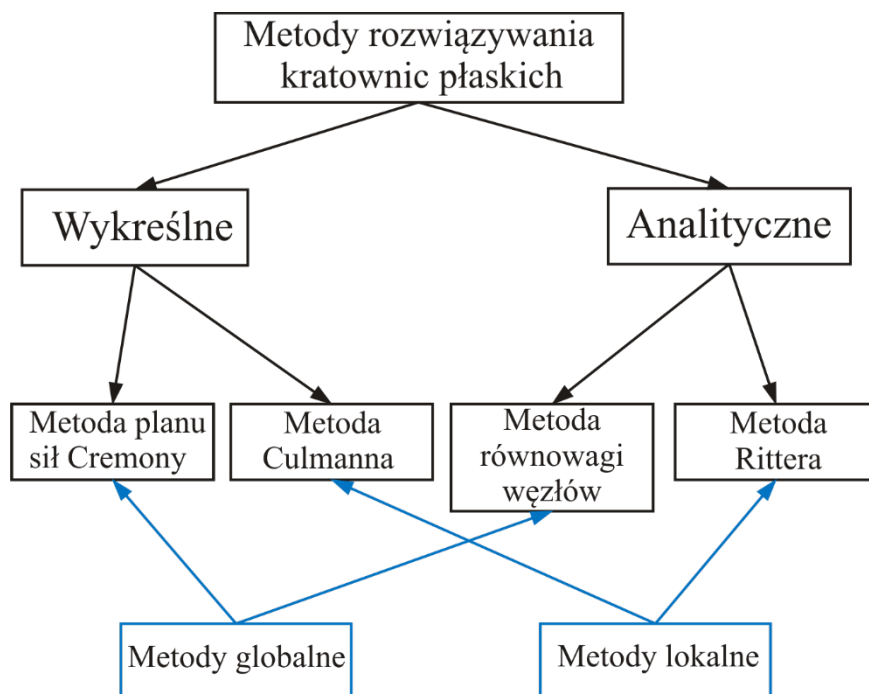


WAŻNE

Wśród klasycznych metod rozwiązywania kratownic płaskich można wyróżnić **metody wykreślne** (dziś już praktycznie nie stosowane) oraz **metody analityczne**.

Jak wynika z Rys. 35, możliwy jest też podział na **metody lokalne**, służące do obliczania sił wewnętrznych w kilku wybranych prętach oraz **metody globalne** – pozwalające na rozwiązanie całej kratownicy.

⁴⁸ W kratownicy statycznie niewyznaczalnej nie da się wyznaczyć sił we wszystkich prętach metodami statyki.



Rys. 35 Podział metod rozwiązywania kratownic płaskich

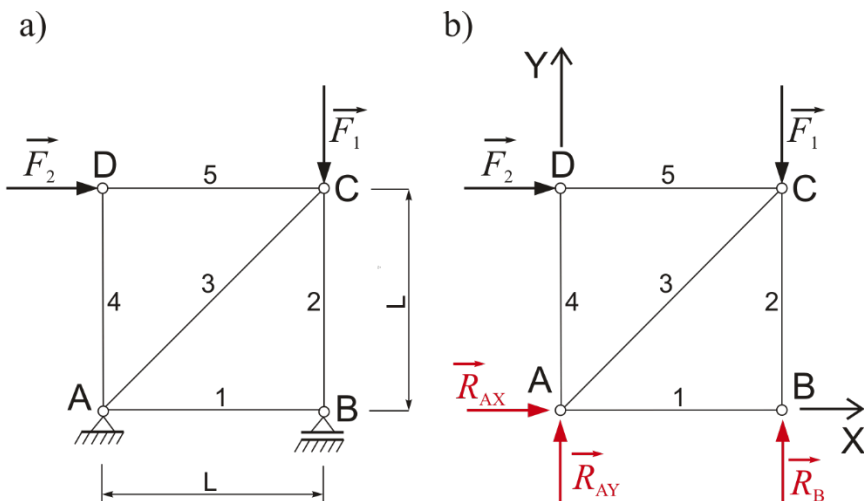
5.2. Procedura rozwiązywania kratownic płaskich

Rozwiązanie kratownicy płaskiej należy przeprowadzać zgodnie z opisaną poniżej procedurą.

1. Sprawdzić warunek statycznej niewyznaczalności .
2. Uwolnić od więzów, wprowadzając w ich miejsce odpowiednie reakcje (Rys. 36b).
3. Obliczyć wartości reakcji z zastosowaniem równań równowagi płaskiego dowolnego układu sił ⁴⁹. W przypadku kratownicy przedstawionej na Rys. 36 odpowiadający układ równań wygląda następująco:

⁴⁹ Na tym etapie rozwiązanie kratownicy traktuje się myślowo jak ciągłe ciało sztywne ograniczone węzłami – bez widocznych prętów.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \Leftrightarrow R_{Ax} + F_2 = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \Leftrightarrow R_{Ay} + R_B - F_1 = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \Leftrightarrow R_B \cdot L - F_1 \cdot L - F_2 \cdot L = 0 \end{cases} \quad (1.25)^{50}$$



Rys. 36 Uwolnienie od więzów kratownicy płaskiej

4. Sprawdzić wartości reakcji za pomocą równania momentów

względem innego bieguna, np. B: $\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0^{51}$.

5. Zaznaczyć siły w prętach⁵² – zwroty sił zawsze od węzła⁵³ (Rys. 37).

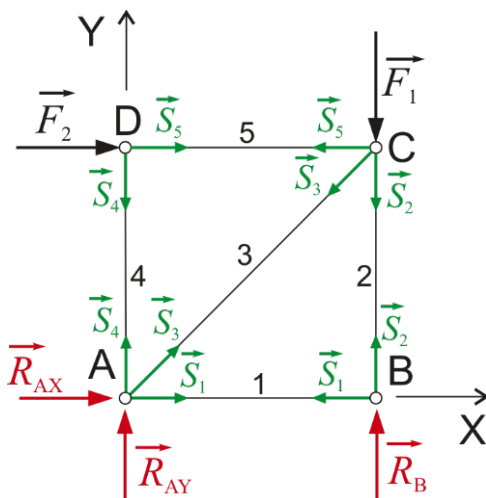
⁵⁰ Wybór bieguna (węzła) jest dowolny, ale w rozpatrywanym przypadku w węźle A występują dwie reakcje, więc zapisanie równania momentów względem A ma tę zaletę, że w otrzymanym równaniu wystąpi tylko jedna niewiadoma R_B .

⁵¹ Znak zapytania nad znakiem równości oznacza, że warunek ten podlega sprawdzeniu.

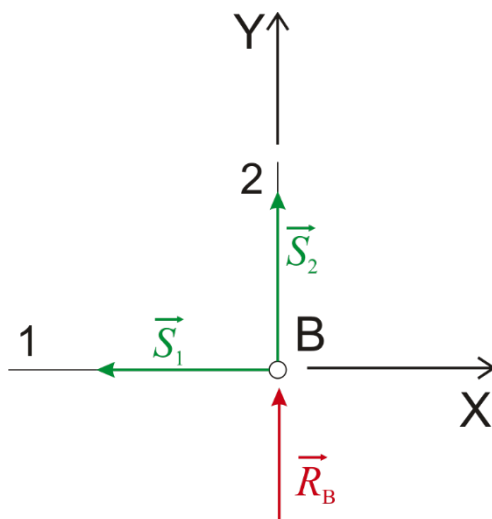
⁵² Od tego punktu procedury rozpoczyna się właściwe rozwiązanie kratownicy, czyli obliczenie sił w prętach.

⁵³ Takie podejście zapewnia z założenia dodatnią wartość siły w pręcie, gdyż wektory sił $\vec{S}_i$ na Rys. 37 oznaczają działanie prętów na węzły, stąd – zgodnie z III. prawem Newtona – węzeł działa na pręt siłą o przeciwnym zwrocie – rozciągając go.

6. Obliczyć siły w prętach poprzez rozważanie równowagi poszczególnych węzłów⁵⁴, z zastosowaniem równań równowagi płaskiego układu sił zbieżnych.



Rys. 37 Siły w prętach kratownicy



Rys. 38 Równowaga sił w wybranym węźle kratownicy

⁵⁴ Należy wybierać początkowo te węzły, w których występuje nie więcej niż dwie niewiadome siły w prętach, gdyż dostępne są jedynie dwa równania równowagi. Następnie zazwyczaj można zająć się sąsiednim węzłem (o ile liczba niewiadomych sił nie przekracza dwu).

W przypadku rozważanej kratownicy, równania równowagi wybranego węzła B wyglądają następująco:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = -S_1 = 0 \Rightarrow S_1 = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = R_B + S_2 = 0 \Rightarrow S_2 = -R_B \end{cases} \quad (1.26)$$

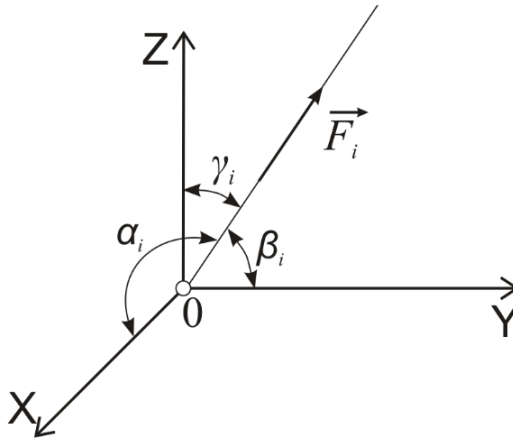
6. Przestrzenny układ sił

Podobnie jak układ płaski, przestrzenny układ sił może być zbieżny, równoległy lub dowolny.

6.1. Przestrzenny zbieżny układ sił

Przestrzenny zbieżny układ sił – jest to układ sił w przestrzeni, których linie działania przecinają się w jednym punkcie.

Poszczególnym siłom w przestrzeni można przyporządkować tzw. kosinusy kierunkowe, pozwalające opisać kierunek i -tej siły względem osi kartezjańskiego układu odniesienia (Rys. 39)⁵⁵.



Rys. 39 Opis kierunku siły w przestrzeni

⁵⁵ W ogólnym przypadku kierunek siły nie musi przechodzić przez początek układu odniesienia.

Można w związku z tym zapisać wyrażenia, na długości rzutów poszczególnych sił na osie układu odniesienia:

$$\begin{aligned} F_{ix} &= F_i \cos \alpha_i \\ F_{iy} &= F_i \cos \beta_i \\ F_{iz} &= F_i \cos \gamma_i \end{aligned} \quad (1.27)$$

Słuszna jest przy tym zależność:

$$\cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \gamma_i = 1 \quad (1.28)$$

Na mocy twierdzenia o rzucie wypadkowej można zapisać kolejne zależności:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + \dots + F_n \cos \alpha_n = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} &= \sum_{i=1}^n F_i \cos \beta_i \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} &= \sum_{i=1}^n F_i \cos \gamma_i \end{aligned} \quad (1.29)$$

oraz wyrażenie na wektor główny przestrzennego układu sił:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \equiv \left(\sum_{i=1}^n F_{ix} \right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy} \right) \vec{j} + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz} \right) \vec{k} \quad (1.30)$$

Warunek równowagi układu przestrzennego zbieżnego jest taki sam, jak dla układu zbieżnego płaskiego (por. wzór):

$$\vec{F} = \vec{0} \quad (1.31)$$

jednak tym razem wynikają z niego trzy równania równowagi, które muszą być jednocześnie spełnione:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad (1.32)$$

6.2. Przestrzenny układ sił równoległych



WAŻNE

Przestrzenny układ sił równoległych – jest to układ sił w przestrzeni, których linie działania są równoległe (Rys. 40).

Można założyć, że linie działania sił układu są równoległe do osi Z, a wówczas jego wypadkowa będzie także równoległa do tej osi. Wypadkowa musi zastępować układ sił w sensie dawania takich samych skutków⁵⁶. W tym przypadku jej wartość będzie równa wartości wektora głównego, ale trzeba jeszcze określić jej położenie względem początku układu odniesienia. Innymi słowy, należy przeprowadzić redukcję układu sił równoległych do bieguna O.



WAŻNE

W tym celu należy zastosować twierdzenie Varignona:

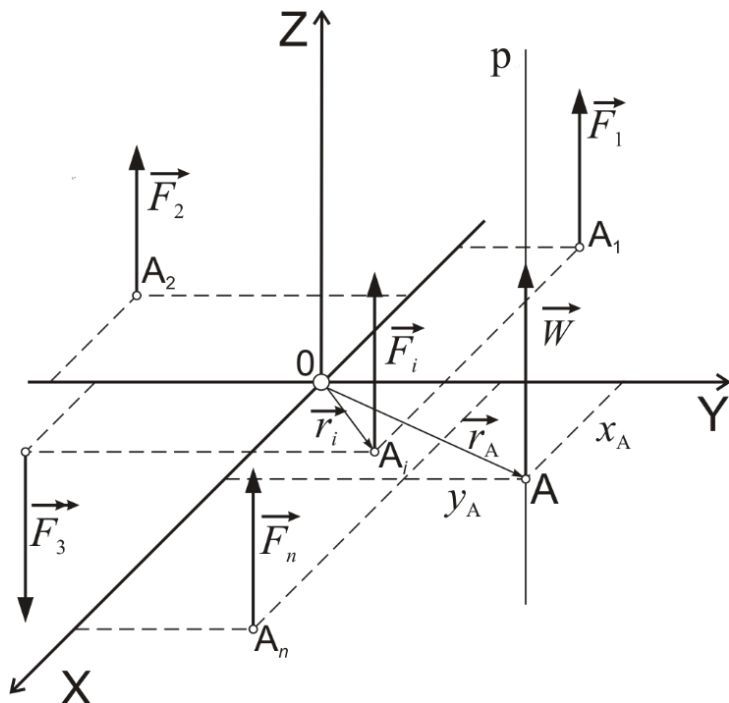
Moment wypadkowej $\vec{W}$ przestrzennego układu sił równoległych względem dowolnego punktu równa się sumie momentów sił układu względem tego samego punktu.

$$\vec{r}_A \times \vec{W} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iO} = \vec{M}_O \quad (1.33)$$

⁵⁶ Tym razem chodzi o tzw. siły masowe, których działanie łatwiej zastąpić wypadkową, niż wymienione w przypisie 3

Promień-wektor określający linię działania wypadkowej określony jest zależnością:

$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}, \quad (1.34)^{57}$$



Rys. 40 Przestrzenny układ sił równoległych

Wówczas

$$\vec{r}_A \times \vec{W} = y_A W \vec{i} - x_A W \vec{j} \quad (1.35)$$

Z kolei:

$$\vec{M}_{i0} = F_i y_i \vec{i} - F_i x_i \vec{j} \quad (1.36)$$

⁵⁷ Siły układu równoległego (Rys. 40), w tym wypadkowa są równoległe do osi Z, stąd we wzorze brak trzeciej składowej.

Z równania wynika teraz:

$$y_A W \vec{i} - x_A W \vec{j} = \sum_{i=1}^n F_i y_i \vec{i} - \sum_{i=1}^n F_i x_i \vec{j} \quad (1.37)$$

Stąd:

$$x_A = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{W} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad y_A = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (1.38)$$

Wyrażenia opisują położenie wypadkowej $\vec{W}$ względem osi Z poprzez określenie śladu jej linii działania p w płaszczyźnie XY – punkt A⁵⁸.



WAŻNE

Można wykazać, że obrócenie układu odniesienia nie zmienia wzajemnego położenia (w kierunku prostopadłym) wypadkowej i poszczególnych sił układu równoległego, tzn. istnieje taki punkt A, przez który stale przechodzi linia działania wypadkowej. Punkt ten nazywa się środkiem sił równoległych.

Spostrzeżenie to jest bardzo cenne przy analizie układów sił masowych (siły grawitacji, siły bezwładności) pozwala wyznaczać położenie środków ciężkości⁵⁹ ciał.

⁵⁸ Niemniej jednak każda siła jest wektorem posuwym, a więc wypadkową można przesuwąć wzdłuż jej linii działania.

⁵⁹ Równolegle używane jest w mechanice pojęcie środka masy. W przypadku figur geometrycznych (linii, figur płaskich, powłok, brył) o jednorodnym rozkładzie masy (ciężaru), środek ciężkości pokrywa się ze środkiem geometrycznym figury.

6.3. Środki ciężkości⁶⁰

Pojęcie środka ciężkości dotyczy środka sił równoległych w zastosowaniu do sił grawitacji. W sytuacji, gdy siła ciężżenia jest skośna względem każdej z osi układu odniesienia, wzór musi uwzględnić dodatkowo trzecią współrzędną środka ciężkości (C, Rys. 41), przy czym w miejsce sił $\vec{F}_i$ należy w tym wypadku postawić ciężary $\vec{G}_i$ poszczególnych cząstek lub większych fragmentów⁶¹ ciała zgodnie ze wzorem:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n G_i x_i}{\sum_{i=1}^n G_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n G_i y_i}{\sum_{i=1}^n G_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n G_i z_i}{\sum_{i=1}^n G_i} \quad (1.39)$$

Wzory te można dostosować do kształtu ciała (linia, powierzchnia, bryła) definiując stosowne współczynniki rozkładu masy (gęstość) i pamiętając, że ciężar w polu grawitacyjnym oblicza się jako

$$\vec{G} = mg \text{ [N]} \quad (1.40)$$

Dla ciała o jednym wymiarze znacznie większym niż dwa pozostałe (pręt, belka), którego reprezentacją graficzną będzie **linia**, rozkład masy określić można w stosunku do długości: $\rho_L \text{ [kg/m]}$. W takim przypadku siła ciężaru odcinka linii o długości $L_i \text{ [m]}$ określona jest następująco:

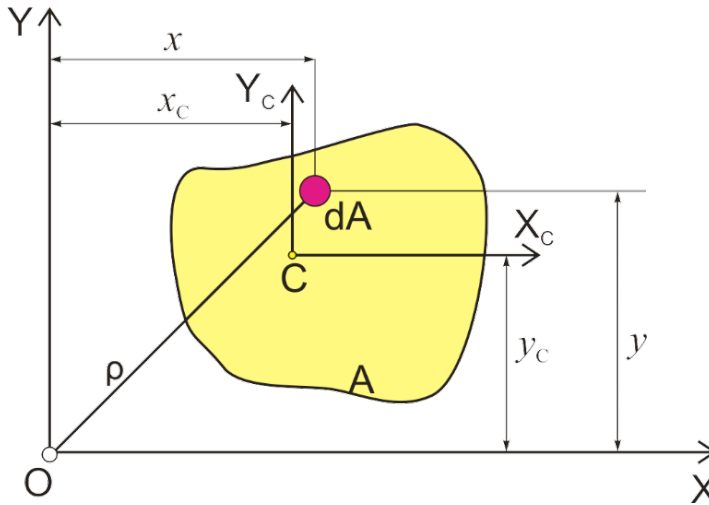
$$G_i = L_i g \text{ [N]} \quad (1.41)$$

Podobnie można zdefiniować ciężar fragmentu **powierzchni** $A_i \text{ [m}^2\text{]}$ (powłoki, figury płaskiej), wprowadziwszy miarę gęstości na jednostkę powierzchni $\rho_A \text{ [kg/m}^2\text{]}$:

⁶⁰ W niniejszym rozdziale omówiono przypadki ciał o jednorodnym rozkładzie masy.

⁶¹ Jeżeli mają foremny kształt, np. sześcian, półkole, prosty odcinek.

$$\vec{G}_i = \rho_A A_i g \text{ [N]} \quad (1.42)$$



Rys. 41 Środek ciężkości figury płaskiej

Analogicznie definiuje się gęstość masy w cząstce objętości $V_i \text{ [m}^3\text{]}$

bryły (ciała o trzech wymiarach tego samego rzędu) - $\rho_v \text{ [kg/m}^3\text{]}$; ciężar fragmentu bryły określa wówczas wzór:

$$\vec{G}_i = \rho_v V_i g \text{ [N]} \quad (1.43)$$

Aby określić położenie środka ciężkości **linii**, należy do wzoru wstawić wyrażenie , a następnie wyciągnąć przed znak sumy (w liczniku i w mianowniku) stały czynnik ρ_L i skrócić go. Wskutek tego działania otrzymuje się następujące wzory:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n L_i x_i}{\sum_{i=1}^n L_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n L_i y_i}{\sum_{i=1}^n L_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n L_i z_i}{\sum_{i=1}^n L_i} \quad (1.44)^{62, 63}$$

⁶² Środek ciężkości linii, ale także powierzchni czy bryły może leżeć poza nią – np. dla pręta w kształcie litery C.

⁶³ Można powiedzieć, że jest to średnia ważona z wagami L_i .

Podobnie, wstawiając wzór do i skracając stałą ρ_A otrzymuje się wzory na współrzędne środka ciężkości **powierzchni**:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (1.45)^{64}$$

Wreszcie dla ciała o kształcie **bryły**, do wzoru należy wstawić zależność, a następnie zredukować stałą ρ_V , aby otrzymać wyrażenia:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i x_i}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i y_i}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i z_i}{\sum_{i=1}^n V_i} \quad (1.46)$$

6.4. Momenty statyczne



WAŻNE

Momenty statyczne to jedne z wielu charakterystyk geometrycznych przekrojów; ich istnienie wynika z faktu, że pole przekroju nie jest wystarczającą miarą właściwości mechanicznych figur płaskich.

Momenty statyczne pojawiły się już we wzorze, jednak poniżej zostaną scharakteryzowane dokładnie.

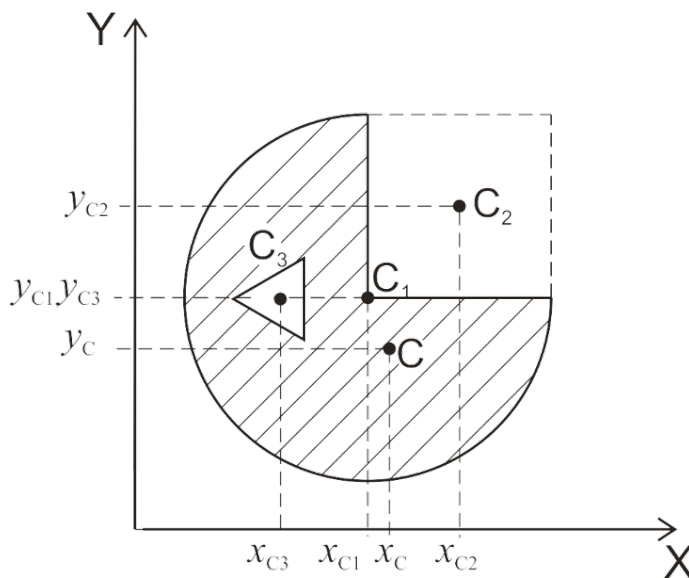
Momenty statyczne figury płaskiej względem osi prostokątnego układu odniesienia zdefiniowane są następująco:

⁶⁴ W szczególnym przypadku – dla figury płaskiej (przekroju ciała) w jednej z płaszczyzn układu odniesienia, np. XY, zastosowanie mają dwa z trzech wzorów.

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A z dA \quad (1.47)$$

Momenty statyczne (względem tej samej osi) są **addytywne** można je dodawać lub odejmować od siebie; mogą też przyjmować wartości dodatnie, bądź ujemne. Znając wartości momentów statycznych danej figury płaskiej (przekroju ciała) można wyznaczyć położenie środka ciężkości:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A x dA}{A}, \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A y dA}{A} \quad (1.48)$$



Rys. 42 Uproszczony sposób obliczania współrzędnych środka ciężkości figury płaskiej

Wzór różni się od wzoru zastosowaniem całek – dotyczy on bowiem figury płaskiej o dowolnym kształcie, w której liczba znikomo małych fragmentów powierzchni dA jest nieskończenie duża. W przypadku figur płaskich złożonych ze skończonej liczby figur foremnych (trójkąt, koło itp.) można, zamiast wzoru, zastosować wzór w postaci:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (1.49)$$

gdzie A_i oznacza pole i -tej części figury płaskiej, zaś x_{Ci} , y_{Ci} to współrzędne środka ciężkości tej części (Rys. 42).

Moment statyczny figury płaskiej względem jej osi symetrii jest równy zero. Podobnie moment statyczny względem osi centralnej, tj. przechodzącej przez środek ciężkości figury płaskiej równa się zero.

6.5. Przestrzenny dowolny układ sił



WAŻNE

Przestrzenny dowolny układ sił to układ sił dowolnie rozmieszczonych w przestrzeni.

Układ taki można w ogólnym przypadku zastąpić wektorem głównym ($\vec{F}$, Rys. 43), będącym sumą geometryczną wszystkich sił układu, przyłożonym do dowolnie wybranego bieguna redukcji O oraz momentem głównym, czyli sumą geometryczną momentów wszystkich sił układu względem bieguna O^{65} ($\vec{M}_O$).

Wektor główny przestrzennego dowolnego układu sił można opisać zależnością:

$$\vec{F} = \left(\sum_{i=1}^n F_{ix} \right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy} \right) \vec{j} + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz} \right) \vec{k}, \quad (1.50)$$

⁶⁵ Zmiana bieguna redukcji przestrzennego dowolnego układu sił wiąże się ze zmianą momentu głównego; wektor główny pozostaje taki sam.

zaś moment główny:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n M_{iO} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix} \quad (1.51)$$

Wartość wektora głównego oblicza się ze wzoru:

$$F = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz}\right)^2}, \quad (1.52)$$

a jego kierunek określają kosinusy kierunkowe (por. Rys. 43):

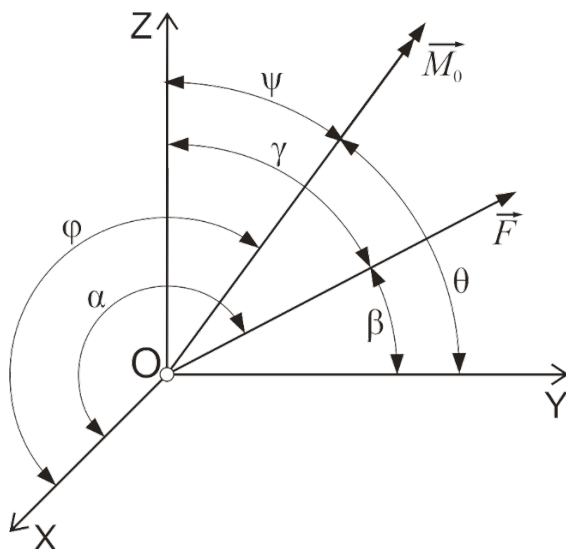
$$\cos \alpha_i = \frac{\sum_{i=1}^n F_{ix}}{F}, \quad \cos \beta_i = \frac{\sum_{i=1}^n F_{iy}}{F}, \quad \cos \gamma_i = \frac{\sum_{i=1}^n F_{iz}}{F} \quad (1.53)$$

Podobnie, wartość momentu głównego i jego kierunek opisują poniższe wzory:

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}, \quad (1.54)$$

$$\cos \phi_i = \frac{M_{Ox}}{F}, \quad \cos \theta_i = \frac{M_{Oy}}{F}, \quad \cos \psi_i = \frac{M_{Oz}}{F}, \quad (1.55)$$

w których M_{Ox} , M_{Oy} i M_{Oz} oznaczają długości rzutów momentu głównego ($\vec{M}_O$) na osie układu odniesienia.



Rys. 43 Opis kierunków wektora głównego i momentu głównego przestrzennego dowolnego układu sił



WAŻNE

Najwyższy stopień redukcji przestrzennego dowolnego układu sił to zastąpienie danego układu tzw. skrętnikiem.

Skrętnik (śruba statyczna) to układ współliniowy wektora głównego układu sił ($\vec{F}$) i składowej (rzutu) momentu głównego na kierunek wektora głównego (Rys. 44).

Na ogół dowolny układ sił redukuje się do skrętnika, a tylko w szczególnym przypadku do samej siły wypadkowej⁶⁶: gdy wektor główny układu sił nie jest wektorem zerowym ($\vec{F} \neq \vec{0}$) i moment główny sił układu, względem dowolnego bieguna O, jest prostopadły do wektora głównego ($\vec{M} \perp \vec{F}$, zob. podrozdział 4.2).

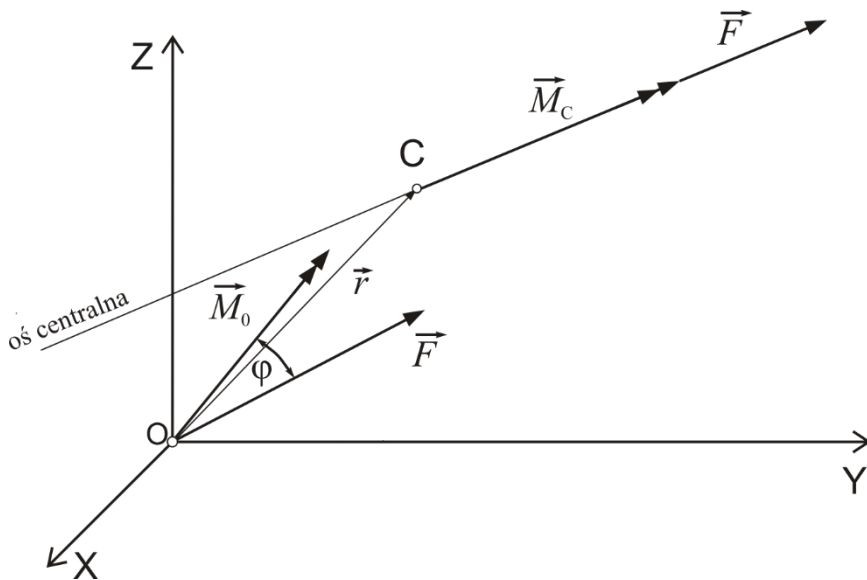
⁶⁶ Dlatego nie należy nadużywać określenia „wypadkowa” – bezpieczniej jest mówić „wektor główny”.

Linia działania skrętnika nosi nazwę **osi centralnej**. Położenie osi centralnej można określić stosując zasadę zmiany bieguna redukcji, w tym wypadku z O na C:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_O + \vec{r} \times \vec{F}, \quad (1.56)$$

przy czym $\vec{M}_C = \vec{M}_F$, gdyż punkt C leży na osi centralnej. Wynika stąd, że proporcje między składowymi $\vec{F}$ i $\vec{M}_C$ muszą być takie same:

$$\frac{M_{Cx}}{F_x} = \frac{M_{Cy}}{F_y} = \frac{M_{Cz}}{F_z}, \quad (1.57)$$



Rys. 44 Skrętnik

Podstawiając teraz składowe wektora $\vec{M}_C$, wynikające ze wzorów i otrzymuje się poszukiwane równanie osi centralnej.

Wektor główny ($\vec{F}$), będący sumą geometryczną wszystkich sił układu jest wektorem swobodnym, niezależnym od obioru bieguna redukcji (O), dlatego jest nazywany **pierwszym niezmiennikiem**

układu sił. Z kolei moment główny ($\vec{M}_O$) to suma momentów sił układu względem obranego bieguna O, zależna (w ogólnym przypadku) od obioru bieguna; jednak rzut $\vec{M}_O$ na $\vec{F}$ nie zależy od obioru bieguna O, dlatego wartość tego rzutu (skalar) ma wartość stałą, w myśl wzoru:

$$\vec{M}_O \cdot \vec{F} = \text{const} \quad (1.58)$$

i nazywana jest **drugim niezmiennikiem układu sił**.

6.6. Przypadki redukcji dowolnego układu sił

Możliwe są następujące **przypadki redukcji** przestrzennego dowolnego układu sił:

- działanie układu sił można zastąpić jednym jedynym skrętnikiem lub pewnym układem dwóch sił skośnych, przy czym układów takich jest nieskończenie wiele; wektor główny i moment główny są wówczas wektorami nie zerowymi ($\vec{F} \neq \vec{0} \wedge \vec{M}_O \neq \vec{0}$),
- działanie ukł. sił można zastąpić samą tylko wypadkową $\vec{W}$, równą wektorowi głównemu $\vec{F}$ ($\vec{F} \neq \vec{0} \wedge \vec{M}_O \neq \vec{0} \wedge \vec{M}_O \perp \vec{F}$); oś centralna staje się wówczas linią działania wypadkowej,
- działanie układu sił można zastąpić siłą wypadkową przechodzącą przez biegun redukcji ($\vec{F} \neq \vec{0} \wedge \vec{M}_O = \vec{0}$ - układ płaski dowolny),
- układ można zastąpić parą sił ($\vec{F} = \vec{0} \wedge \vec{M}_O \neq \vec{0}$).

6.7. Równowaga przestrzennego układu sił

Przestrzenny dowolny układ sił jest w równowadze, jeżeli zarówno wektor główny, jak i moment główny względem dowolnie obranego bieguna są wektorami zerowymi:

$$\vec{F} = \vec{0} \wedge \vec{M}_O = \vec{0} \quad (1.59)$$

Podane wyżej warunki równowagi dają sześć skalarnych równań równowagi, które muszą być jednocześnie spełnione:

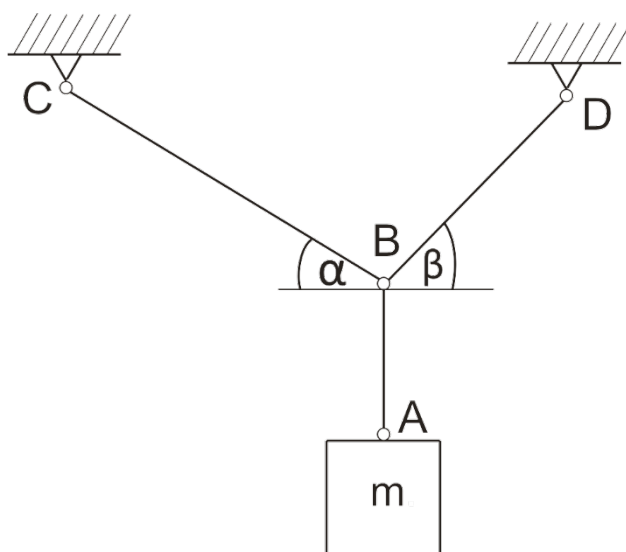
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \\ \wedge \quad \sum_{i=1}^n M_{iOx} = 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n M_{iOy} = 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n M_{iOz} = 0 \end{aligned} \quad , \quad (1.60)$$

gdzie M_{iOx} , M_{iOy} i M_{iOz} to długości rzutów wektora momentu głównego na osie układu odniesienia.

7. Przykłady zadań ze statyki z rozwiązaniami

Przykład S.1

Obciążnik o masie $m=500\text{g}$ zawieszono na dwóch cięgnach, jak na Rys. 45. Obliczyć siły w cięgnach, jeżeli $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Zadanie rozwiązać metodą wykreślną, stosując twierdzenie o trzech siłach, a następnie analitycznie, stosując równania równowagi płaskiego zbieżnego układu sił.



Rys. 45 Schemat obliczeniowy do przykładu S.1

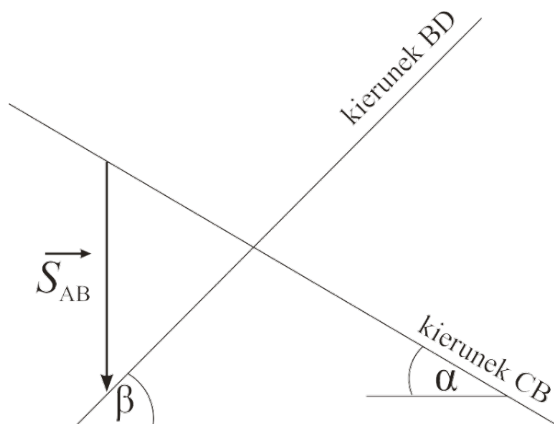
Rozwiązanie.

Siła w cięgnie AB ($\vec{S}_{AB}$) musi równoważyć ciężar obciążnika:

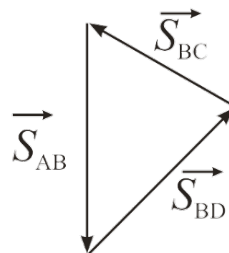
$$S_{AB} = G = mg = 0,5\text{kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cong 4,9\text{N}$$

1) Metoda wykreślna

a)

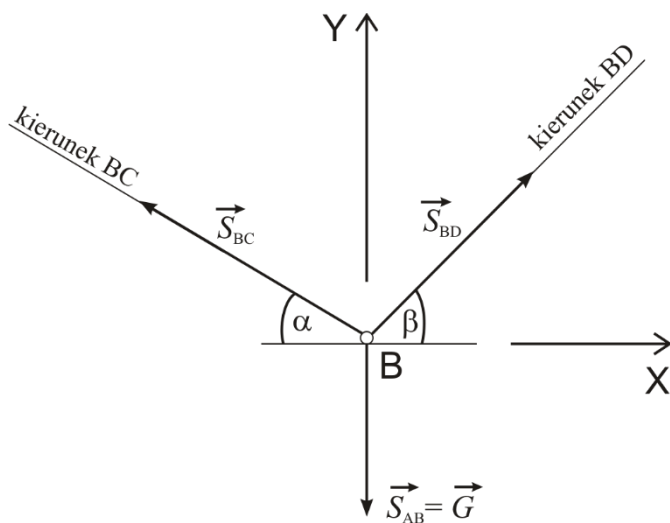


b)



**Rys. 46 Rozwiązanie przykładu S.1 metodą wykreślną
z zastosowaniem tw. o trzech siłach**

2) Metoda analityczna (równań równowagi)



Rys. 47 Rozwiązanie przykładu S.1 metodą analityczną

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n P_{ix} = -S_{BC} \cdot \cos \alpha + S_{BD} \cdot \cos \beta = 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} = -S_{AB} + S_{BC} \cdot \sin \alpha + S_{BD} \cdot \sin \beta = 0 \end{cases}$$

Z pierwszego równania równowagi wynika:

$$S_{BC} = S_{BD} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

Z drugiego równania równowagi:

$$S_{BC} = \frac{G}{\sin \alpha} - S_{BD} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Porównując stronami dwa ostatnie wyrażenia otrzymuje się:

$$S_{BD} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{G}{\sin \alpha} - S_{BD} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$S_{BD} \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) = \frac{G}{\sin \alpha}$$

$$S_{BD} = \frac{G}{\sin \alpha \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right)} = \frac{G}{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha}}$$

$$S_{BD} = \frac{G \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} = \frac{G \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymuje się:

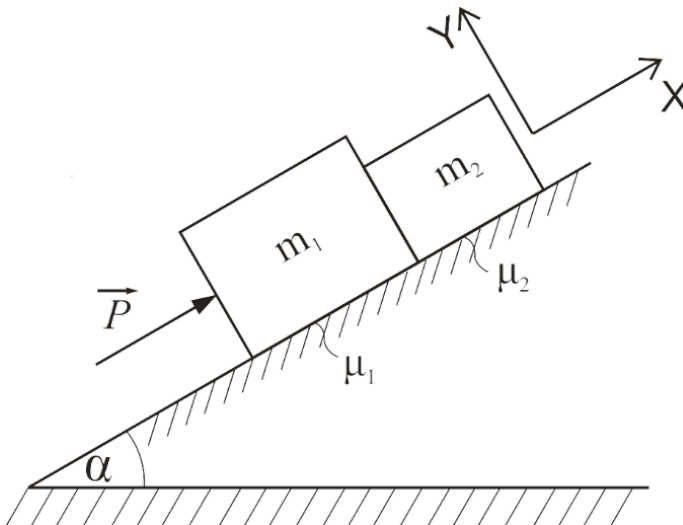
$$S_{BD} = \frac{4,9N \cdot \cos 30^\circ}{\sin(+75^\circ)} \cong 4,4N$$

Następnie:

$$S_{BC} = S_{BD} \frac{\cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} \cong 3,6 N$$

Przykład S.2

Dwa klocki spoczywają na równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem α . Obliczyć najmniejszą wartość siły $\bar{P}$, wymaganą do utrzymania klocków w równowadze, mając dane: $m_1 = 2\text{ kg}$, $m_2 = 3\text{ kg}$, $\mu_1 = 0,25$, $\mu_2 = 0,1$, $\alpha = 25^\circ$

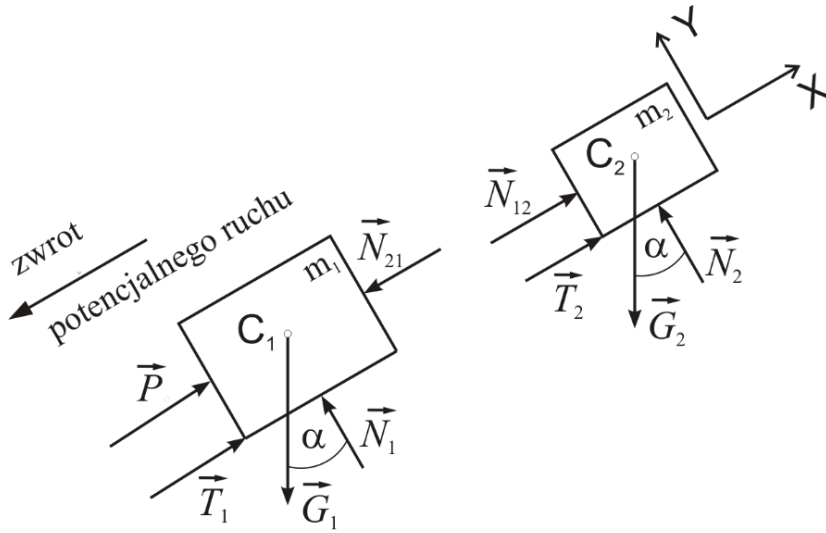


Rys. 48 Schemat obliczeniowy do przykładu S.2

Rozwiązanie.

Należy rozpatrzyć równowagę sił działających na każdy klocek osobno (Rys. 49), przy czym zakłada się, że siły tarcia osiągnęły wartości maksymalne (graniczne).

Zwroty sił tarcia T_1 i T_2 są przeciwne do przewidywanego zwrotu prędkości ruchu klocków (gdyby nastąpiła utrata równowagi). Z kolei siły wzajemnego oddziaływania (nacisku) klocków na siebie są sobie równe co do wartości: $N_{12} = N_{21} = N$, ale nadal pozostają nieznane.



Rys. 49 Równowaga klocków po myślowym usunięciu więzów

Należy zapisać równania równowagi układów sił zbieżnych osobno dla każdego klocka:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = P - N + T_1 - G_1 \sin \alpha = 0$$

1)

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = N_1 - G_1 \cos \alpha = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = N - G_2 \sin \alpha + T_2 = 0$$

2)

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = N_2 - G_2 \cos \alpha = 0$$

W powyższym układzie czterech równań występuje sześć niewiadomych: P , N , T_1 , N_1 , T_2 i N_2 . Do rozwiązania układu potrzebne są dwa dodatkowe równania, za które można przyjąć zależności wynikające z praw tarcia Coulomba-Morena:

$$T_1 = \mu_1 N_1 \quad ; \quad T_2 = \mu_2 N_2$$

Należy je teraz podstawić do układu równań 1) i 2), a następnie rozwiązać go.

$$\begin{cases} P - N + \mu_1 N_1 - G_1 \sin \alpha = 0 \\ N_1 - G_1 \cos \alpha = 0 \\ N - G_2 \sin \alpha + \mu_2 N_2 = 0 \\ N_2 - G_2 \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Wynika stąd, że:

$$N_1 = G_1 \cos \alpha \quad ; \quad N_2 = G_2 \cos \alpha$$

Podstawiając te zależności do pierwszego i trzeciego równania z powyższego układu otrzymuje się:

$$\begin{cases} P - N + \mu_1 G_1 \cos \alpha - G_1 \sin \alpha = 0 \\ N - G_2 \sin \alpha + \mu_2 G_2 \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Z drugiego równania wynika:

$$N = G_2 (\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha) ,$$

co po wstawieniu do pierwszego równania daje:

$$P - G_2 (\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha) + \mu_1 G_1 \cos \alpha - G_1 \sin \alpha = 0$$

i ostatecznie:

$$P = G_1 (\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + G_2 (\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha)$$

Pamiętając, że $G_1 = m_1 g$ i $G_2 = m_2 g$, po podstawieniu danych liczbowych otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= 2 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot (\sin 25^\circ - 0,25 \cdot \cos 25^\circ) + 3 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot (\sin 25^\circ - 0,1 \cdot \cos 25^\circ) \\ &\cong 3,8 \text{ N} + 9,8 \text{ N} \cong 13,6 \text{ N} \end{aligned}$$

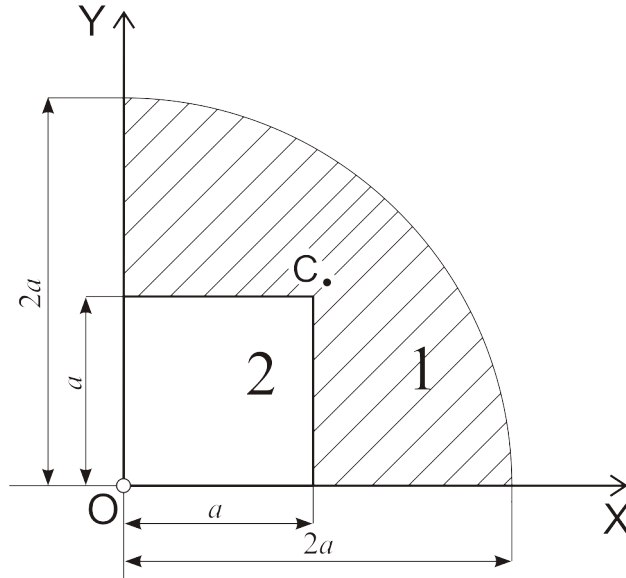
Można jeszcze obliczyć wartość siły wzajemnego nacisku klocków (N):

$$\begin{aligned} N &= G_2 (\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha) = m_2 g (\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha) = \\ &= 3 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ N} \cdot (\sin 25^\circ - 0,1 \cos 25^\circ) \cong 9,8 \text{ N} \end{aligned}$$

Wartość tej siły jest więc dodatnia, co oznacza, że klocki pozostają w kontakcie w chwili rozpoczęcia potencjalnego ruchu.

Przykład S.3

Obliczyć moment statyczny figury płaskiej (Rys. 50) względem osi x .



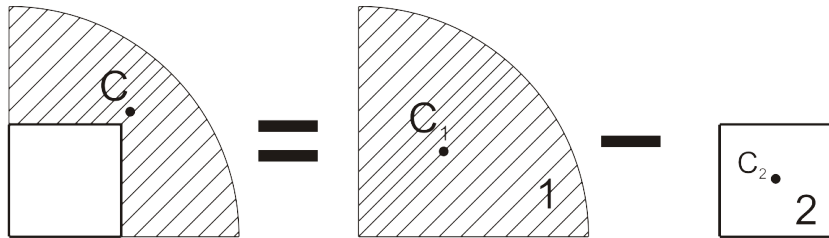
Rys. 50 Schemat obliczeniowy do przykładu S.3

Rozwiązanie.

Figurę przedstawioną na Rys. 50 można widzieć jako ćwiartkę koła o promieniu $2a$ (1) z wyciętym kwadratem o boku a (2) Rys. 51. Moment statyczny dla ćwiartki koła o promieniu $2a$ względem osi x wynosi:

$$S_{x1} = y_{c1} A_1$$

Przy czym $y_{C1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2a}{\pi} = \frac{8a}{3\pi}$, zaś $A_1 = \frac{1}{4} \pi \cdot (2a)^2 = \pi a^2$



Rys. 51 Superpozycja figur foremnych w przykładzie 3.

Stąd:

$$S_{x1} = \frac{8}{3} \cdot \frac{a}{\pi} \cdot \pi a^2 = \frac{8}{3} a^3$$

W przypadku drugiej figury (kwadratu):

$$S_{x2} = y_{C2} A_2, \quad y_{C2} = \frac{1}{2} a, \quad A_2 = a^2$$

Stąd:

$$S_{x2} = \frac{1}{2} a \cdot a^2 = \frac{a^3}{2}$$

W kontekście Rys. 51, korzystając z addytywności momentów statycznych można zapisać:

$$S_x = S_{x1} - S_{x2}$$

Stąd moment statyczny figury płaskiej względem osi X wynosi:

$$S_x = \frac{8}{3} a^3 - \frac{1}{2} a^3 = \frac{13}{6} a^3 \cong 2,17 a^3$$

Można też obliczyć położenie środka ciężkości (C) całej figury (do tego wszak służy S):

$$y_C = \frac{S_x}{A}, \text{ przy czym } A = A_1 - A_2 = \pi a^2 - a^2 = 2,14a^2$$

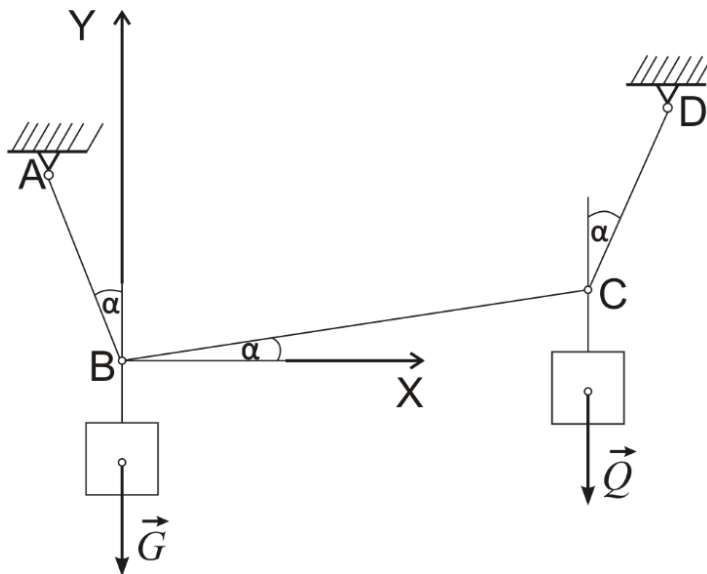
Stąd

$$y_C = \frac{2,17a^3}{2,14a^2} \cong 1,01a \text{ (zob. położenie punktu C na Rys. 50).}$$

Oдноśnie wartości S_y i x_C będą takie same.

Przykład S.4

Na trzech cięgnach AB, BC i CD zawieszono dwa obciążniki o ciężarach, odpowiednio $\vec{G}$ i $\vec{Q}$ (Rys. 52), tak iż w położeniu równowagi cięgno BC tworzy kąt α z poziomem (oś X), zaś pozostałe dwa cięgna – kąt α z pionem (oś Y). Obliczyć siły w cięgnach stosując równania równowagi dla płaskiego zbieżnego układu sił, mając dane $G = 500N$. Obliczyć także konieczną wartość ciężaru Q drugiego obciążnika.



Rys. 52 Schemat obliczeniowy do przykładu S.4

Rozwiązanie.

W pierwszej kolejności należy myślowo przeciąć cięgna, zastępując ich działanie siłami wewnętrznymi oraz rozpatrując osobno równowagę punktów B i C.

1) Metoda wykreślna

W celu rozwiązania zagadnienia na sposób wykreślny, trzeba wpierw narysować wektor siły $\vec{G}$ w przyjętej skali (Rys. 53). Następnie wykreślić kierunki cięgien AB i BC (a zarazem istniejących w nich sił) przez początek i koniec wektora $\vec{G}$ (zasada $n-2$ sił – tu: trójkąt zamknięty, Rys. 53a). Uzyskuje się w ten sposób długość (wartość) wektora siły $\vec{S}_{BC}$, który należy odłożyć z przeciwnym zwrotem na kolejnym rysunku (Rys. 53b). Wówczas, po narysowaniu kierunku cięgna CD i linii pionowej, reprezentującej kierunek ciężaru $\vec{Q}$ otrzymuje się końcowe rozwiązanie zagadnienia – można odczytać wartość $\vec{Q}$ w przyjętej uprzednio skali rysunku.

2) Metoda analityczna

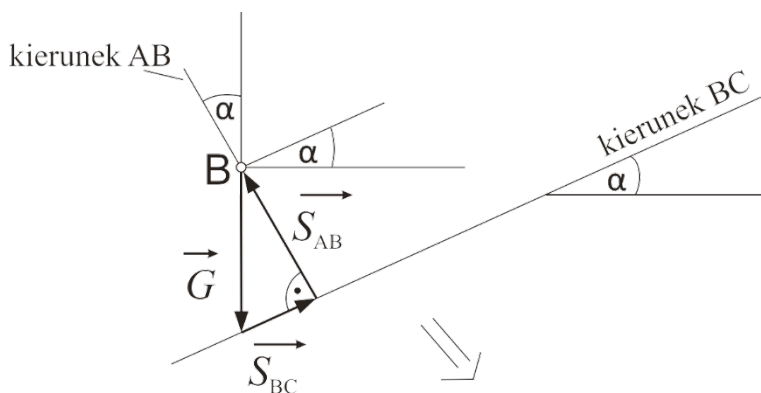
Należy zapisać równania równowagi układu płaskiego zbieżnego osobno dla punktów B i C, opierając się na Rys. 54.

Równania równowagi dla punktu B:

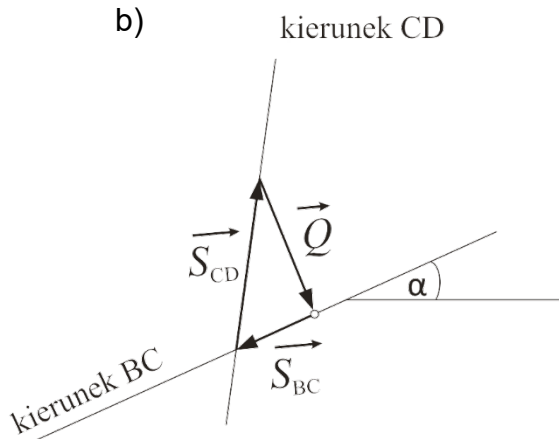
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = -S_{AB} \sin \alpha + S_{BC} \cos \alpha = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = S_{AB} \cos \alpha + S_{BC} \sin \alpha - G = 0$$

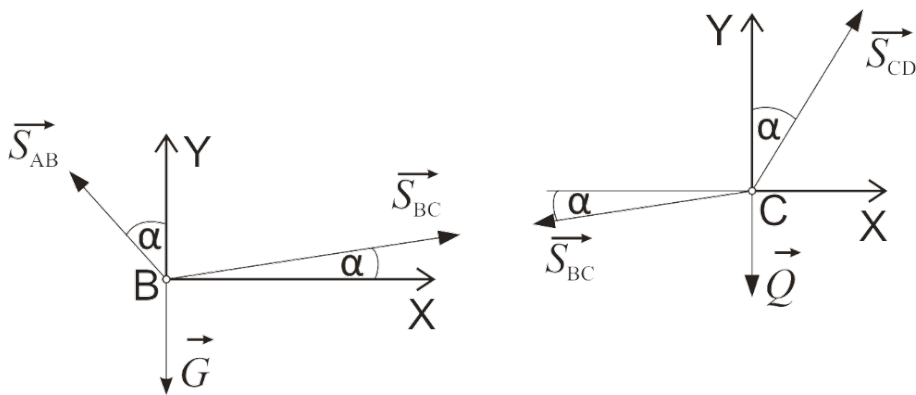
a)



b)



Rys. 53 Rozwiązanie przykładu S.4 sposobem wykreślnym



Rys. 54 Rozwiązanie przykładu S.4. sposobem analitycznym

Stąd $S_{AB} = S_{BC} \operatorname{ctg} \alpha$ i następnie $S_{BC} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \alpha + S_{BC} \sin \alpha = G$

$$S_{BC} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \sin \alpha \right) = G$$

$$S_{BC} \left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) = G$$

$$S_{BC} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = G$$

$$S_{BC} = G \sin \alpha$$

Stąd

$$S_{AB} = S_{BC} \operatorname{ctg} \alpha = G \cos \alpha$$

Równania równowagi dla punktu C (Rys. 54):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = -S_{BC} \cos \alpha + S_{CD} \sin \alpha = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = S_{CD} \cos \alpha - S_{BC} \sin \alpha - Q = 0$$

Stąd

$$S_{CD} = S_{BC} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = G \cos \alpha$$

Z kolei:

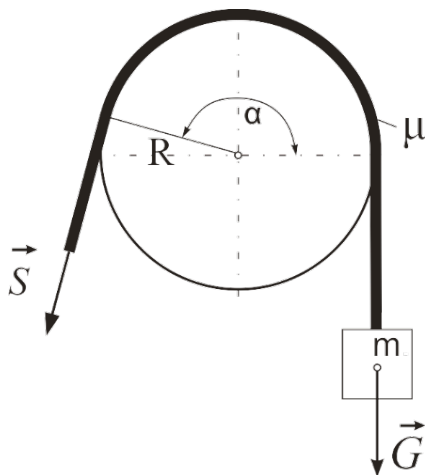
$$Q = S_{CD} \cos \alpha - S_{BC} \sin \alpha$$

$$Q = G \cos^2 \alpha - G \sin^2 \alpha$$

$$Q = G$$

Przykład S.5

Przez chropowatą, nieruchomą bęben przerzucono linę, tak iż kąt opasania wynosi $\alpha = 150^\circ$ (Rys. 55). Do jednego końca liny przymocowano obciążnik o masie $m = 12\text{kg}$. Obliczyć, w jakim zakresie może się zmieniać wartość siły $\vec{S}$ przyłożonej do drugiego końca liny, aby układ pozostawał w równowadze, jeżeli współczynnik tarcia ślizgowej liny o bęben wynosi $\mu = 0,15$.



Rys. 55 Schemat obliczeniowy do przykładu S.5

1) przypadek potencjalnego ruchu ciężarka w dół $S < G$

Z równania Eulera:

$$G = S_{\min} e^{\mu\alpha} \quad 67$$

$$\alpha = 150^\circ = \frac{5}{6} \pi \text{ rad}$$

$$S_{\min} = G e^{-\mu\alpha} = m g e^{-\mu\alpha}$$

$$S_{\min} = 12 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot e^{-\frac{5}{6} \pi \cdot 0,15} \cong 79,5 \text{ N}$$

2) przypadek potencjalnego ruchu ciężarka do góry $S > G$

Z równania Eulera:

$$S_{\max} = G e^{\mu\alpha} = 12 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot e^{0,15 \cdot \frac{5}{6} \pi}$$

$$S_{\max} = 174,3 \text{ N}$$

Stąd $S \in \langle 79,5 \text{ N}; 174,3 \text{ N} \rangle$ lub inaczej $S \in \langle 0,68 G; 1,48 G \rangle$

Jak widać, zakres dopuszczalnych zmian wartości siły $\bar{S}$ jest znaczny – około 80% G , co wynika z dość dużego kąta opasania.

⁶⁷ Należy podstawić kąt α w radianach: $\alpha [\text{rad}] = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha [^\circ]$

8. Pytania testowe



1. **Pojęcie „masa” charakteryzuje:**
 - a. dużą liczbę punktów materialnych
 - b. bezwładność ciała
 - c. ciecz o dużej lepkości
2. **Siła w mechanice może być przedstawiona jako:**
 - a. wektor
 - b. skalar
 - c. wersor
3. **Liczba niezależnych współrzędnych określających położenie ciała w przestrzeni to:**
 - a. liczba więzów
 - b. liczba Napiera
 - c. liczba stopni swobody
4. **Punkt materialny to:**
 - a. model ciała fizycznego, dla którego można zaniedbać ruch obrotowy
 - b. model ciała fizycznego, dla którego można zaniedbać ruch postępowy
 - c. model ciała fizycznego wykonującego ruch płaski
5. **W myśl zasady zeszywnienia, ciało sztywne jest:**
 - a. ciałem odkształcalnym w bardzo niewielkim stopniu
 - b. ciałem odkształcalnym, którego objętość pozostaje stała
 - c. ciałem całkowicie nieodkształcalnym
6. **Pierwsze prawo Newtona dotyczy:**
 - a. oporów toczenia
 - b. ruchu jednostajnie przyspieszonego
 - c. układu sił w równowadze działających na dane ciało



- 7. Drugie prawo Newtona opisuje:**
 - a. związek między siłą działającą na ciało, a jego przyspieszeniem
 - b. wpływ tarcia na wzrost temperatury ciała
 - c. zależność między prędkościami ciała w ruchu płaskim
- 8. Pod pojęciem więzu należy rozumieć:**
 - a. mocną, nieważką i doskonale wiotką linę
 - b. ograniczenie ruchu ciała
 - c. materiał drewnopochodny o dużej sztywności
- 9. Ciężno to rodzaj więzu charakteryzujący się:**
 - a. znaczną rozciągliwością
 - b. dużym przekrojem poprzecznym
 - c. brakiem oporu przy zginaniu
- 10. Podparcie ciała na prętach przegubowych zapewnia:**
 - a. znajomość kierunków działania sił
 - b. stateczność
 - c. znaczne ugięcie
- 11. Zasada równoległoboku ma zastosowanie przy:**
 - a. znajdowaniu wypadkowej dwóch sił
 - b. obliczaniu pola powierzchni przekroju pręta
 - c. obliczaniu średniej wartości sił
- 12. Układ zerowy sił oznacza:**
 - a. układ sił w stanie początkowym
 - b. układ sił o zerowym momencie głównym
 - c. układ sił w równowadze
- 13. Wektor posuwny to:**
 - a. wektor siły granicznej pokonującej siłę tarcia
 - b. każdy wektor siły
 - c. wektor momentu w płaskim układzie sił



14. Twierdzenie o trzech siłach dotyczy:

- a. równowagi trzech sił nierównoległych w przestrzeni
- b. równowagi trzech sił nierównoległych na płaszczyźnie
- c. równowagi trzech sił równoległych w przestrzeni

15. Zasada $n-2$ sił dotyczy:

- a. rozwiązania układu n sił na płaszczyźnie
- b. rozwiązania układu 2 sił na płaszczyźnie
- c. jest tożsama z tw. o trzech siłach

16. Twierdzenie o rzucie wypadkowej mówi, że:

- a. suma rzutów sił układu na daną oś wynosi zero
- b. suma rzutów sił układu na daną oś jest nieokreślona
- c. suma rzutów sił układu na daną oś równa się rzutowi wektora głównego

17. Warunek równowagi płaskiego zbieżnego układu sił to:

- a. zerowanie się wektora głównego
- b. zerowanie się sumy rzutów sił na oś X
- c. brak par sił

18. Siła tarcia zależy od wielkości powierzchni styku ciał:

- a. tak
- b. nie
- c. tak – w warunkach tarcia suchego

19. Jednostką współczynnika tarcia statycznego jest:

- a. mm
- b. 1/mm
- c. jest to wielkość bezwymiarowa

20. Siła tarcia kinetycznego zależy od siły nacisku:

- a. wprost proporcjonalnie
- b. odwrotnie proporcjonalnie
- c. nie zależy



21. Kąt tarcia jest równoważny z:

- a. współczynnikiem tarcia
- b. arcusem tangensem współczynnika tarcia
- c. kosinusem współczynnika tarcia

22. Stożek tarcia to:

- a. abstrakcyjna figura geometryczna o kącie wierzchołkowym równym podwójnemu kątowi tarcia
- b. abstrakcyjna figura geometryczna o kącie wierzchołkowym równym kątowi tarcia
- c. abstrakcyjna figura geometryczna poza którą nie ma tarcia

23. Siła tarcia cięga o walec opisana jest:

- a. wzorem różniczkowym
- b. funkcją wykładniczą współczynnika tarcia
- c. funkcją potęgową współczynnika tarcia

24. Wartość momentu siły oblicza się jako:

- a. chwilową wartość siły
- b. iloczyn długości ramienia siły i wartości tej siły
- c. rzut wypadkowej na dowolną oś do niej skośną

25. Para sił to inaczej:

- a. moc siły
- b. dwie siły równoległe o takich samych zwrotach
- c. dwie równe co do wartości siły równoległe o przeciwnych zwrotach

26. Redukcja układu sił polega na

- a. zastąpieniu jednego układu sił innym, uproszczonym
- b. skreśleniu równoważących się sił
- c. rzutowaniu sił na osie układu odniesienia i posumowaniu składowych

27. Skrętnik to

- a. narzędzie ręczne
- b. inna nazwa śruby
- c. wektor główny i rzut momentu głównego złożone wzdłuż kierunku tego pierwszego



28. Wektor momentu głównego jest wektorem swobodnym:

- a. w płaskim dowolnym układzie sił
- b. nigdy
- c. w przestrzennym dowolnym układzie sił

29. Równania równowagi przestrzennego zbieżnego układu sił mają postać:

- a. $\sum_{i=1}^3 P_{ix} = 0 \wedge \sum_{i=1}^3 P_{iy} = 0 \wedge \sum_{i=1}^3 P_{iz} = 0$
- b. $\sum_{i=1}^n \vec{P}_{ix} = 0 \wedge \sum_{i=1}^n \vec{P}_{iy} = 0 \wedge \sum_{i=1}^n \vec{P}_{iz} = 0$
- c. $\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \wedge \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \wedge \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$

30. Momenty sił w przestrzennym układzie sił zbieżnych:

- a. nie występują
- b. równoważą się nawzajem
- c. są równoważone przez wypadkową

31. Środek geometryczny figury płaskiej („środek ciężkości”)

- a. zawsze leży w punkcie przecięcia przekątnych figury
- b. zawsze leży w obszarze figury
- c. może leżeć poza obszarem figury

32. Jeżeli moment statyczny względem danej osi równa się zero, to:

- a. taka oś nie istnieje
- b. środek geometryczny leży poza obszarem figury
- c. jest to oś symetrii figury

33. Momenty statyczne przyjmują wartości:

- a. zawsze dodatnie
- b. dodatnie bądź ujemne
- c. wyłącznie ujemne



- 34. Siła tarcia w przypadku tarcia tocznego:**
- a. jest taka sama, jak przy tarcu ślizgowym statycznym
 - b. równa się momentowi siły nacisku
 - c. ma zwrot zgodny z prędkością
- 35. Moment statyczny koła względem osi centralnej:**
- a. nie istnieje
 - b. równa się zero, niezależnie od kąta obrotu osi
 - c. równa się zero tylko, gdy jest to oś symetrii
- 36. Środek sił równoległych zmienia swoje położenie:**
- a. przy obrocie układu odniesienia
 - b. przy translacji układu odniesienia
 - c. nie zmienia swego położenia
- 37. Zasada równoległoboku może być używana zarówno do składania, jak i rozkładania sił na różne kierunki:**
- a. tak
 - b. nie
 - c. tak, ale tylko wtedy, gdy siły są wzajemnie prostopadłe
- 38. Liczba równań równowagi w przestrzennym dowolnym układzie sił to:**
- a. 3
 - b. 4
 - c. 6
- 39. Pręt w kratownicy może być:**
- a. skręcany
 - b. rozciągany
 - c. zginany
- 40. W metodzie Rittera można przeciąć myślowo:**
- a. co najwyżej 3 pręty
 - b. co najmniej 3 pręty
 - c. tylko dokładnie 3 pręty

1

2

2. Elementy kinematyki



WAŻNE

Kinematyka jest działem mechaniki zajmującym się opisem ruchu ciał materialnych, bez uwzględnienia przyczyn tego ruchu (sił)⁶⁸.

1. Opis ruchu punktu materialnego

Zmiany położenia dowolnego punktu materialnego, wynikające z jego ruchu, można opisać za pomocą trzech współrzędnych x , y i z oraz odpowiedniego promienia-wektora $\vec{r}$ w pewnym nieruchomym układzie odniesienia⁶⁹.

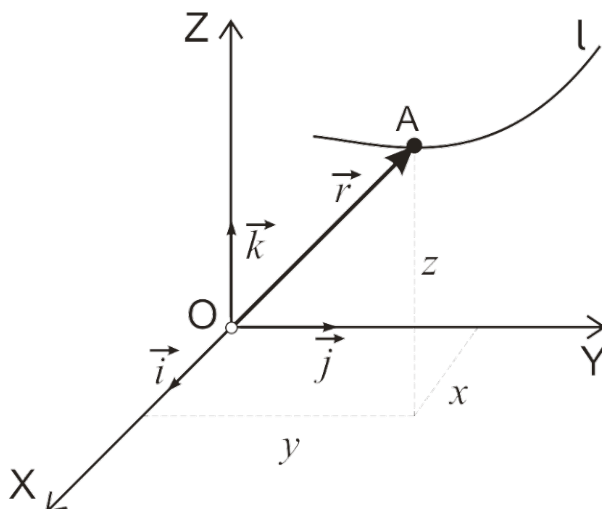
1.1. Równania ruchu punktu materialnego⁷⁰

W celu opisanie ruchu ciała należy określić ruch wszystkich jego punktów. Jednym z modeli ciał w mechanice jest punkt materialny, dla którego nie potrzeba opisywać ruchu obrotowego, a jedynie translacje. Jeżeli punkt materialny A porusza się po dowolnym torze l (Rys. 56),

⁶⁸ Innymi słowy jest to opisywanie ruchu na sposób czysto geometryczny; siły działające na poruszające się ciało uwzględnia się w dynamice.

⁶⁹ Chodzi tu o układ kartezjański (prostokątny), oparty na bazie złożonej z trzech, wzajemnie prostopadłych, wersorów $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$.

⁷⁰ Są to tzw. kinematyczne równania ruchu, mające postać algebraiczną; dynamiczne równania ruchu mają formę równań różniczkowych, które można sprowadzić do równań algebraicznych poprzez dwukrotne całkowanie względem czasu, z uwzględnieniem warunków początkowych ruchu.



Rys. 56 Opis położenia punktu materialnego za pomocą promienia-wektora

to równania:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (1.61)$$

nazywa się (kinematycznymi) równaniami ruchu punktu materialnego.

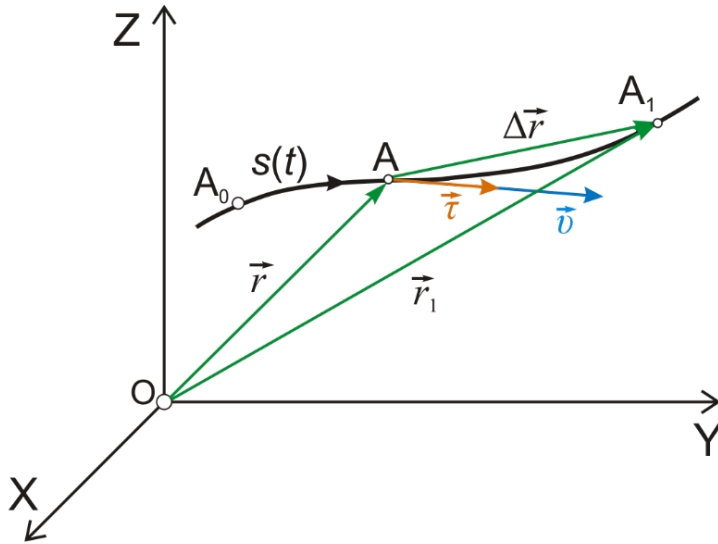
Związek promienia-wektora punktu A z równaniami ruchu przedstawia się następująco:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (1.62)$$

1.2. Równanie ruchu punktu w układzie naturalnym

Położenie punktu A poruszającego się po torze l , można określić za pomocą zmiennej w czasie współrzędnej $s(t)$, odmierzanej **w sposób naturalny** – wzdłuż toru⁷¹ od położenia początkowego A_0 (Rys. 57).

⁷¹ W pewnych warunkach ten sposób określania położenia punktu materialnego w przestrzeni jest wygodniejszy, niż podawanie trzech współrzędnych kartezjańskich, np. podczas lokalizowania obiektu uwiecznionego w krzywoliniowym kanale przestrzennym.



Rys. 57 Współrzędna naturalna

Można wówczas zapisać **równanie ruchu punktu po torze** w postaci:

$$s = s(t) \quad (1.63)$$

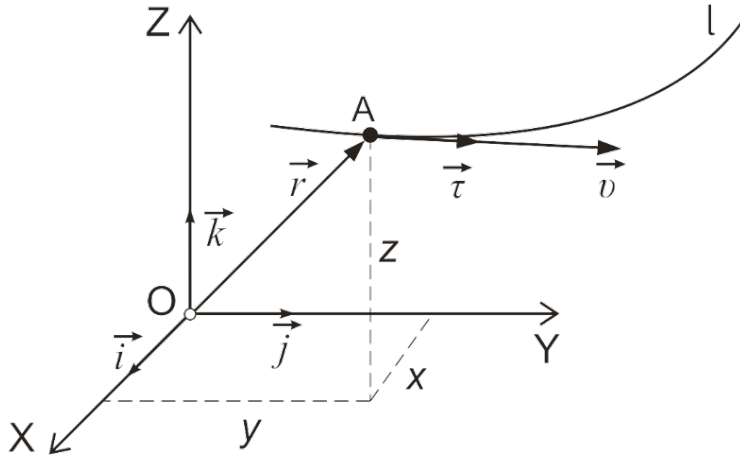
Dokładny, przestrzenny opis układu naturalnego (związanego z torem punktu) przedstawiono w dalszej części niniejszego rozdziału. Tymczasem można zdefiniować prędkość w odniesieniu do współrzędnej naturalnej w następujący sposób:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t) \quad (1.64)^{72}$$

Wzór powyższy można zapisać w formie wektorowej, posługując się wersorem stycznym $\vec{\tau}(t)$ (Rys. 58), którego kierunek zmienia się w czasie ruchu:

⁷² Spotykane jest określenie „szybkość” w odniesieniu do prędkości zdefiniowanej jako pochodna skalara, bez uwzględnienia zwrotu; jest ono pomocne przy określaniu średniej wartości prędkości ruchu cyklicznego („tam i z powrotem”), gdyż w ujęciu wektorowym prędkość średnia równałaby się zero.

$$\vec{v}(t) = \frac{ds(t)}{dt} \vec{\tau}(t) = \dot{s}(t) \vec{\tau}(t) \quad (1.65)^{73}$$



Rys. 58 Prędkość jako pochodna geometryczna promienia-wektora

Dalsze rozważania na temat wektorowego zapisu prędkości przedstawiono w kolejnym punkcie.

1.3. Prędkość punktu materialnego jako wektor

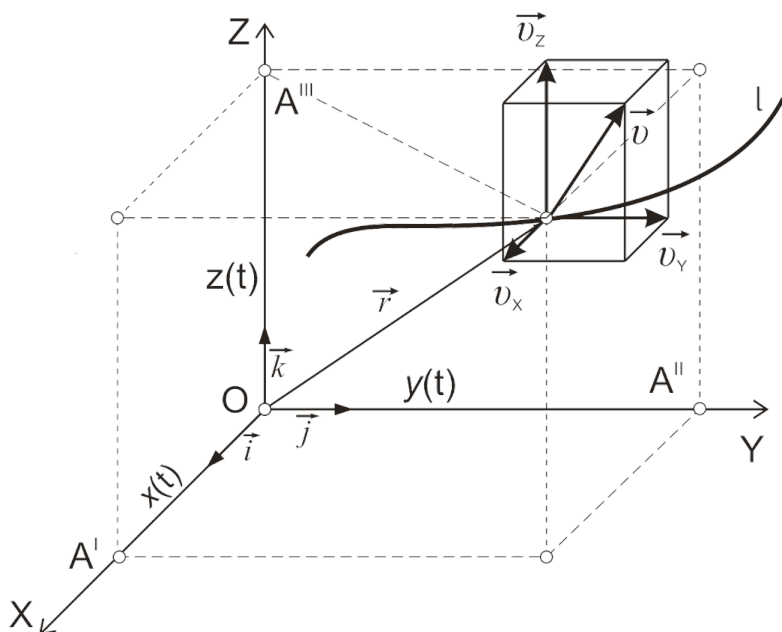
Wektor prędkości punktu można rozłożyć na trzy składowe w prostokątnym układzie odniesienia (Rys. 59), a następnie zapisać związki różniczkowe składowych prędkości z równaniami ruchu:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \dot{x}(t), \quad v_y(t) = \dot{y}(t), \quad v_z(t) = \dot{z}(t), \quad (1.66)$$

przy czym

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.67)$$

⁷³ Spotykane jest określenie „szybkość” w odniesieniu do prędkości zdefiniowanej jako pochodna skalara, bez uwzględnienia zwrotu; jest ono pomocne przy określaniu średniej wartości prędkości ruchu cyklicznego („tam i z powrotem”), gdyż w ujęciu wektorowym prędkość średnia równałaby się zero.



Rys. 59 Składowe wektora prędkości w prostokątnym układzie odniesienia

Można dalej zauważyć, że

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t) + \vec{v}_z(t) = \\ &= \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} = \frac{d}{dt} [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}]\end{aligned}\quad (1.68)$$

W ten sposób otrzymano związki składowych wektora prędkości wzdłuż osi układu z równaniami ruchu punktu materialnego.

Następnie, uwzględniając wzór , można zapisać zależność prędkości od promienia-wektora:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}\quad (1.69)$$

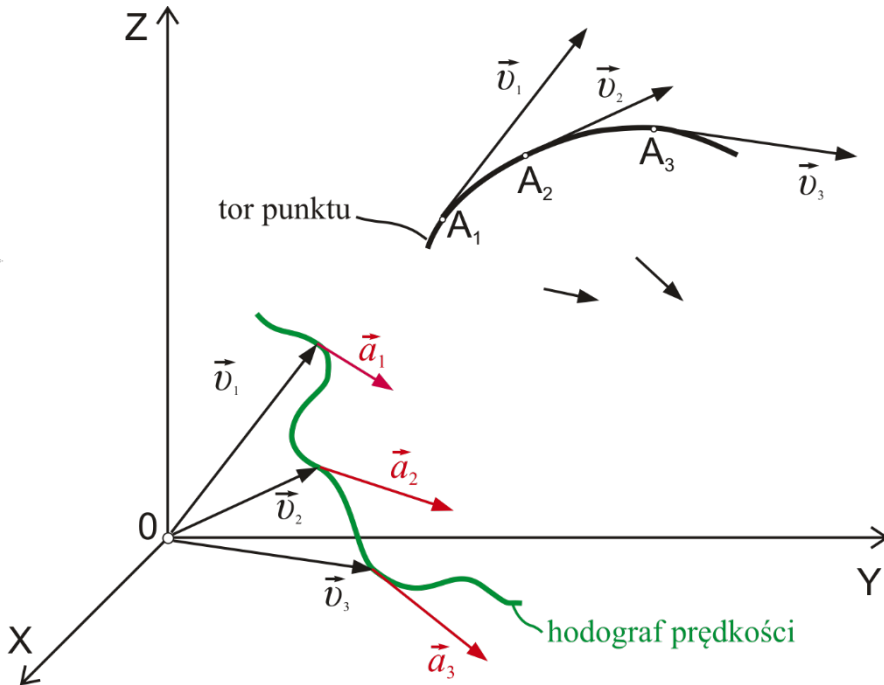
Wynika stąd stwierdzenie, że prędkość jest pochodną geometryczną⁷⁴ promienia-wektora.

⁷⁴ Pojęcie pochodnej geometrycznej (pochodnej wektora) ma szersze znaczenie, niż tylko prędkość punktu materialnego. Określa ona zmianę w czasie położenia końca wektora funkcji, której dotyczy.

1.4. Przyspieszenie punktu materialnego jako wektor

Przyspieszenie punktu materialnego można zdefiniować, przez analogię do wzoru , jako pochodną geometryczną wektora prędkości:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t) \quad (1.70)$$



Rys. 60 Hodograf prędkości – linia styczna do wektora przyspieszenia

Wektor przyspieszenia nie musi być na ogół styczny do toru, tak jak wektor prędkości, jednak istnieje pewna abstrakcyjna krzywa, do której przyspieszenie jest zawsze styczne. Mowa tu o tzw. hodografie prędkości (Rys. 60).



WAŻNE

Hodografem prędkości nazywa się linię, którą zakreślałby w czasie koniec wektora prędkości, gdyby był stale zaczepiony w początku danego układu odniesienia⁷⁵.

Składowe przyspieszenia punktu materialnego można zapisać analogicznie do wzoru w postaci:

$$\begin{aligned}a_x(t) &= \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t), & a_y(t) &= \dot{v}_y(t) = \ddot{y}(t), \\a_z(t) &= \dot{v}_z(t) = \ddot{z}(t)\end{aligned}\tag{1.71}$$

Ponadto

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\tag{1.72}$$

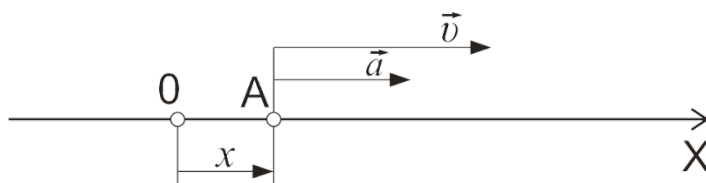
1.5. Ruch prostoliniowy punktu materialnego

Ruch prostoliniowy punktu materialnego może odbywać się ze stałym⁷⁶ przyspieszeniem (opóźnieniem⁷⁷) i wówczas mówi się o ruchu jednostajnie przyspieszonym (opóźnionym).

⁷⁵ W tym toku rozumowania tor punktu można nazwać hodografem promienia-wektora.

⁷⁶ Przyspieszenie punktu (ciała) może zmieniać się w czasie; zmienność tę opisuje tzw. szarpnięcie, czyli pochodna geometryczna względem czasu wektora przyspieszenia.

⁷⁷ Zwrot wektora przyspieszenia jest wtedy przeciwny do zwrotu wektora prędkości.



Rys. 61 Ilustracja ruchu prostoliniowego jednostajnie przyspieszonego

Na Rys. 61 przedstawiono przykład ruchu jednostajnie przyspieszonego punktu materialnego, poruszającego się w danej chwili z prędkością $u(t) \equiv u_x(t)$ i przyspieszeniem $a \equiv a_x = a_0 = \text{const}$. Mając w pamięci wzór można zapisać wyrażenie na prędkość punktu w formie całki z przyspieszenia:

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = \int a_0 dt = a_0 t + C_1, \quad (1.73)$$

gdzie C_1 to stała całkowania, zależna od warunków początkowych ruchu. Podobnie można scałkować wyrażenie, aby otrzymać równanie ruchu punktu materialnego w postaci algebraicznej:

$$x(t) = \int v_x(t) dt = \int (a_0 t + C_1) dt = \frac{1}{2} a_0 t^2 + C_1 t + C_2, \quad (1.74)$$

w którym pojawia się druga stała całkowania C_2 .

Uwzględniając warunki początkowe ruchu w postaci:

$$t = 0 : v_x(t) = v_{x0} \wedge x(t) = x_0 \quad (1.75)$$

otrzymuje się wartości stałych całkowania $C_1 = v_{x0}$, $C_2 = x_0$, a następnie (kinematyczne) równanie ruchu punktu i wyrażenie⁷⁸ opisujące jego prędkość w dowolnej chwili czasu t :

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_{x0}t + x_0 \quad (1.76)$$

$$v_x(t) = a_0 t + v_{x0} \quad (1.77)$$

⁷⁸ Są to całki (rozwiązania) szczególne - dla zadanych warunków początkowych.

W szczególnym przypadku ruchu prostoliniowego przyspieszenie może mieć wartość zero – jest to wówczas ruch jednostajny, tzn. ruch ze stałą prędkością, opisany równaniami:

$$x(t) = v_{x0}t + x_0 \quad (1.78)$$

$$v_x(t) = v_{x0} = \text{const.} \quad (1.79)$$

1.6. Ruch harmoniczny



WAŻNE

Ruch harmoniczny prosty jest to ruch cykliczny po linii prostej, polegający na oscylacji punktu materialnego względem pewnego punktu O, zwanego środkiem ruchu harmonicznego, zgodnie z równaniem:

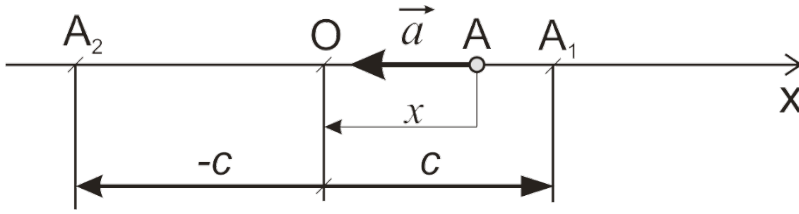
$$x(t) = c \sin(kt + \varphi_0), \quad (1.80)$$

w którym c oznacza amplitudę, czyli największe co do wartości bezwzględnej oddalenie punktu od środka ruchu (Rys. 62); k [rad/s] to pulsacja⁷⁹, a φ_0 [rad] – faza początkowa ruchu.

Okres ruchu harmonicznego (τ [s]) jest to przedział czasu pomiędzy tożsamymi położeniami punktu na torze.

$$\tau = \frac{2\pi}{k} \quad (1.81)$$

⁷⁹ Pulsacja nazywana jest też częstością kołową, ze względu na analogię matematyczną pomiędzy opisem ruchu harmonicznego, a opisem ruchu punktu po okręgu – zob. dalej w tym rozdziale.



Rys. 62 Ilustracja ruchu harmonicznego prostego

Dodatkowym parametrem charakteryzującym ruch harmoniczny jest jego częstość⁸⁰, opisująca ilość cykli na sekundę – ν [$s^{-1}=Hz$]:

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{k}{2\pi} \quad (1.82)$$

Na podstawie wzoru można określić wartość prędkości $v(t)$ [m/s] punktu materialnego w ruchu harmonicznym:

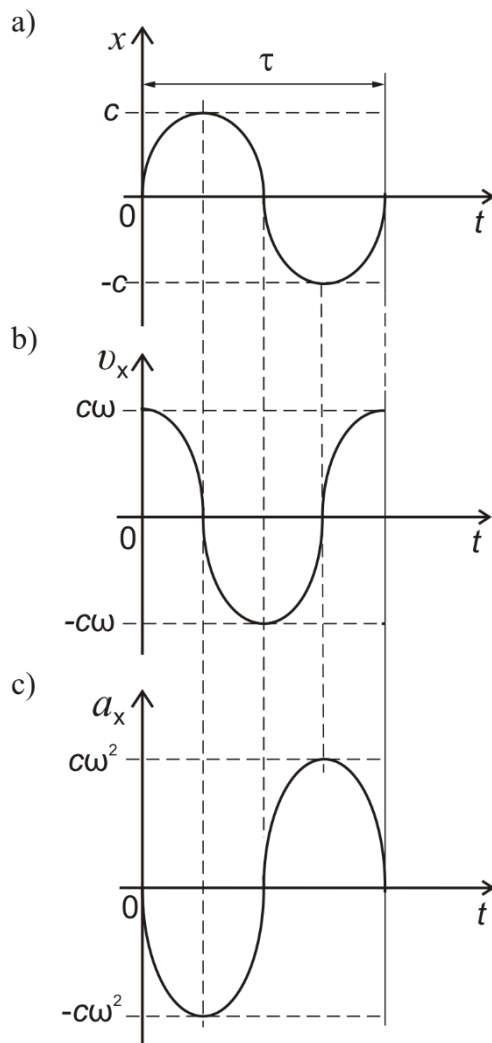
$$v(t) = \dot{x}(t) = ck \cos(kt + \varphi_0) \quad (1.83)$$

oraz wartość przyspieszenia $a(t)$ [m/s^2]:

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -ck^2 \sin(kt + \varphi_0) = -k^2 x(t) \quad (1.84)$$

W położeniach skrajnych wektor prędkości punktu w ruchu harmonicznym $\vec{v}(t)$ zmienia zwrot na przeciwny, a wartość prędkości $v=0$; w środku ruchu harmonicznego (punkt 0 na Rys. 62) wartość bezwzględna prędkości jest maksymalna: $|v| = \max(v(t))$. Z kolei przyspieszenie $\vec{a}(t)$ osiąga największe wartości w położeniach skrajnych – zmieniając przy tym zwrot na przeciwny, zaś w środku ruchu $a=0$. Szczegółowo zmiany te obrazuje Rys. 63 (przy $\varphi_0 = 0$).

⁸⁰ Spotykane jest też określenie częstości; w żadnym razie nie należy jednak mylić częstości z częstością kołową (k), ze względu na różne jednostki.



Rys. 63 Zmiany położenia (a) prędkości (b) i przyspieszenia
(c) punktu materialnego w ruchu harmonicznym

1.7. Analogia pomiędzy ruchem harmonicznym a ruchem punktu po okręgu



WAŻNE

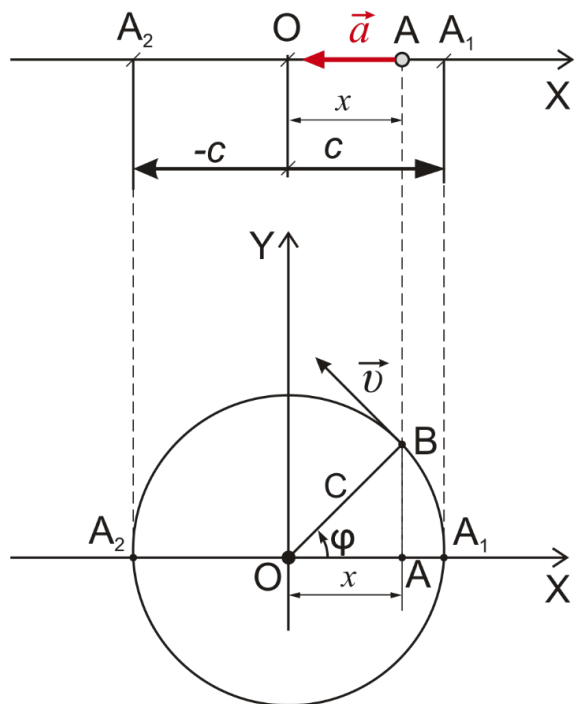
Istotnym zagadnieniem z punktu widzenia matematycznego opisu ruchu harmonicznego jest jego podobieństwo (analogia) do ruchu punktu materialnego po okręgu. Wynika z niego wymienione wyżej pojęcie pulsacji (k) oraz jej specyficzna jednostka rad/s ⁸¹ Pulsacja w ruchu harmonicznym (ruch po prostej) jest odpowiednikiem prędkości kątowej w ruchu po okręgu.

Analogia ta jest szczególnie wyraźna, jeśli Czytelnik wyobrazi sobie, że obserwuje ruch po okręgu z góry – patrząc wzdłuż osi Y (Rys. 64).

Wówczas punkt materialny (nie rzeczywisty, ale ten wyobrażony – z analogii) wydaje się przemieszczać wzdłuż prostego odcinka, będącego rzutem okręgu na płaszczyznę XZ ; istnieje środek ruchu, jak też położenia skrajne, zmienia się zwrot prędkości itd.

Jednocześnie zrozumiałe staje się zastosowanie funkcji trygonometrycznych do opisu ruchu harmonicznego.

⁸¹ Radian uznawany jest za tzw. jednostkę ułomną, gdyż z jego definicji wynika, że równy jest jedności: $r/r = 1$ (długość łuku podzielona przez promień). Należy mieć to na uwadze przeliczając pulsację na prędkość obrotową lub częstość, gdyż w jednym pełnym cyklu (obrocie) jest 2π radianów.



Rys. 64 Ilustracja graficzna analogii pomiędzy ruchem harmonicznym a ruchem po okręgu

1.8. Przyspieszenie styczne i przyspieszenie normalne punktu w ruchu krzywoliniowym

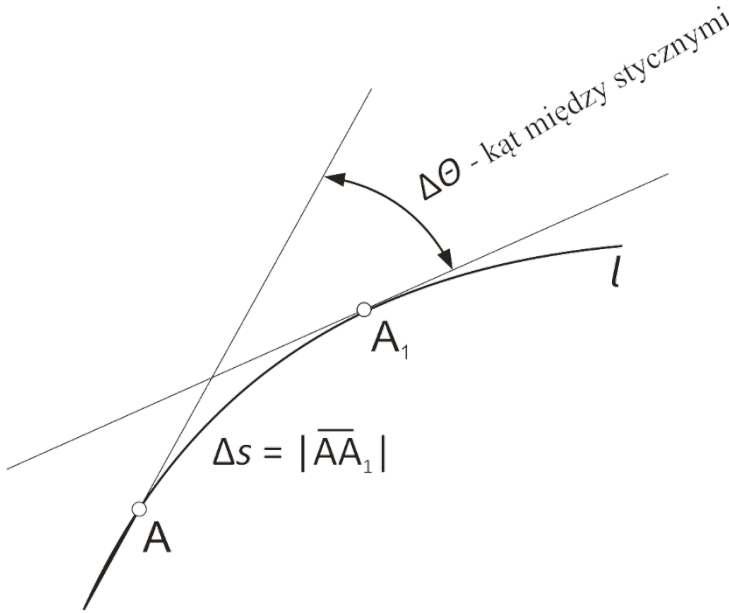
Przyspieszenie punktu można opisywać za pomocą jego składowych prostokątnych – w kartezjańskim układzie odniesienia (por. wzór). W pewnych wypadkach wygodniej jest jednak używać układu naturalnego w danym punkcie A^{82} toru, w którym przyspieszenie rozkłada się na dwie, wzajemnie prostopadłe składowe: styczną ($\vec{a}^s(t)$) i normalną ($\vec{a}^n(t)$), przy czym:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}^s(t) + \vec{a}^n(t) = a^s(t)\vec{\tau} + a^n(t)\vec{\nu} \quad (1.85)$$

⁸² Punkt A reprezentuje jedynie położenie punktu materialnego w przestrzeni na sposób geometryczny; często jednak bywa on utożsamiany z punktem materialnym, którego ruch (zmiana położenia w czasie) jest opisywany.

W powyższym wzorze $\vec{e}_t$ i $\vec{e}_n$ to wersory układu naturalnego (w ujęciu dwuwymiarowym). Czytelnik domyśla się, że wartość przyspieszenia w danej chwili oblicza się następująco:

$$a = \sqrt{(a^s)^2 + (a^n)^2} \quad (1.86)$$



Rys. 65 Krzywizna toru opisanego linią płaską

Pojęciem pomocniczym jest **krzywizna** (κ) toru punktu materialnego. W przypadku toru będącego krzywą płaską (l , Rys. 65), jego krzywiznę w danym punkcie A można zdefiniować następująco:

$$\kappa(A) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|, \quad (1.87)$$

gdzie Δs oznacza przyrost współrzędnej naturalnej w pobliżu punktu A , wskutek ruchu punktu materialnego, zaś $\Delta \theta$ to kąt między stycznymi do toru. Pokrewnym pojęciem jest krzywizna średnia (κ_{sr}):

$$\kappa_{sr} = \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|, \quad (1.88)$$

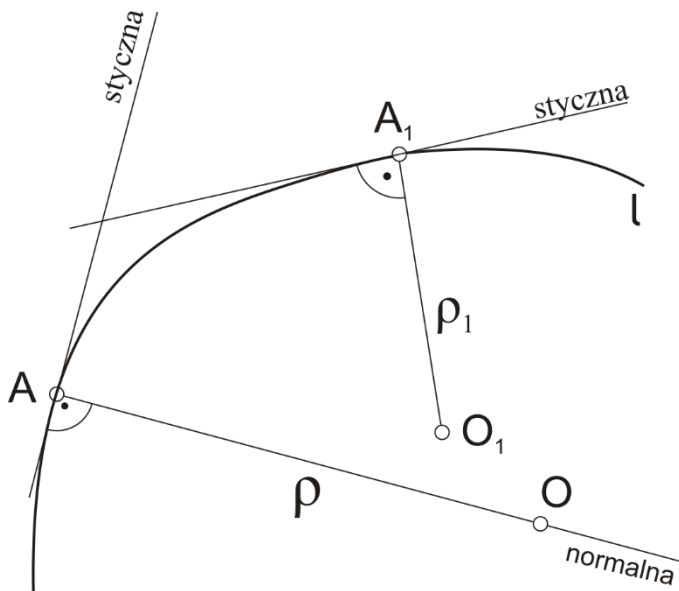
W szczególnym przypadku krzywizna może mieć wartość stałą - na przykład dla łuku okręgu o promieniu r :

$$\kappa = \frac{1}{r} = const \quad (1.89)$$

Dla dowolnej linii o lokalnej krzywiznie $\kappa(A)$, lokalny promień krzywizny to:

$$\rho(A) = \frac{1}{\kappa(A)} \quad (1.90)$$

Dzięki tej definicji można w dalszych rozważaniach posługiwać się pojęciem środka krzywizny w danym punkcie – zob. Rys. 66.



Rys. 66 Promień krzywizny linii

1.9. Naturalny układ współrzędnych w przestrzeni

Poniżej omówiony zostanie szczegółowo **naturalny układ współrzędnych** w punkcie A w ujęciu trójwymiarowym. Związane są z nim pojęcia, zdefiniowane poniżej w kolejności ułatwiającej zbudowanie w wyobraźni Czytelnika rzeczoności układu.

(Prosta) normalna główna – prosta przechodząca przez punkt A i środek krzywizny (O) toru w punkcie A, pokrywająca się z promieniem krzywizny $\rho(t)$ i wersorem normalnym $\bar{\nu}$.

Płaszczyzna prostująca – płaszczyzna prostopadła do prostej normalnej w punkcie A.

Prosta styczna – prosta pokrywająca się z nieskończone krótkim odcinkiem toru punktu materialnego w punkcie A (w przybliżeniu prostoliniowym), którego orientację w przestrzeni opisuje wersor styczny $\bar{\tau}$.

Płaszczyzna ściśle styczna⁸³ – płaszczyzna wyznaczona przez wersor normalny $\bar{\nu}$ i wersor styczny $\bar{\tau}$, prostopadła do płaszczyzny prostującej, przy czym prosta styczna jest śladem jednej płaszczyzny w drugiej.

Płaszczyzna normalna – płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny prostującej i płaszczyzny ściśle stycznej w punkcie A (pokrywa się z promieniem krzywizny ρ).

(Prosta) binormalna (normalna wtórna) – prosta prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznej w punkcie A; linia ta wyznacza razem kierunek wersora binormalnego ($\bar{\beta}$), którego zwrot jest dobrany tak, aby z pozostałymi wersorami tworzył on trójkę prawą (prawoskrętną), w kolejności $\bar{\nu}$, $\bar{\tau}$ i $\bar{\beta}$.

Uzyskany w ten sposób układ odniesienia oparty na trzech, wzajemnie prostopadłych wersorach $\bar{\nu}$, $\bar{\tau}$ i $\bar{\beta}$ nosi nazwę **naturalnego układu współrzędnych** (Rys. 67). Układ ten obraca się w czasie przemieszczania się punktu po torze krzywoliniowym.

Aby zdefiniować przyspieszenie styczne i przyspieszenie normalne należy odnieść się do prędkości punktu – zob. wzór. Na Rys. 68 przedstawiono wektory prędkości punktu materialnego w ruchu krzy-

⁸³ Można obrazowo nazwać tę płaszczyznę „najbardziej dopasowaną” do toru w danym punkcie; w przypadku odcinka okręgu płaszczyzna ta byłaby tożsama z płaszczyzną, w której leży dany okrąg.

woliniowym na płaszczyźnie, wykorzystując naturalny układ współrzędnych.

Zmianę wektora prędkości ($\Delta \vec{v}$) opisuje prosta zależność:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v} \quad (1.91)$$

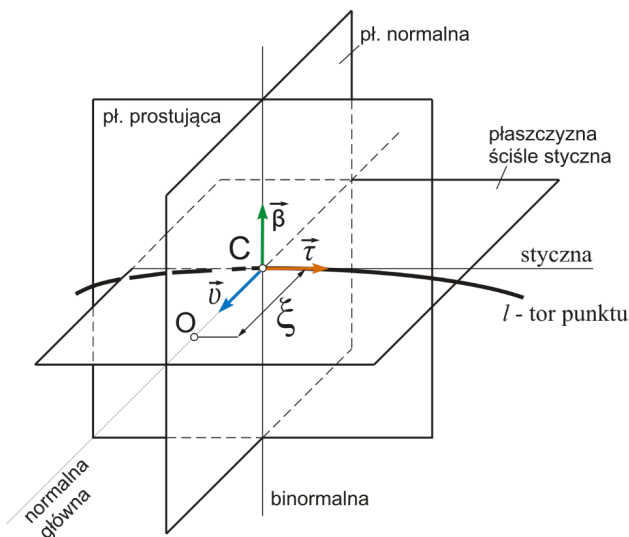
Z kolei przyspieszenie w danej chwili t ruchu, a więc w punkcie A można zdefiniować następująco (por. wzory i):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1.92)$$

Z Rys. 68 wynika, że $|\overline{BC}| = v_1 \cos \Delta \theta - v$ oraz $|\overline{CB}_1| = v_1 \sin \Delta \theta$.

Ponadto $\Delta \vec{v} = \overline{BC} + \overline{CB}_1$. Wstawiając te zależności do wzoru otrzymuje się⁸⁴:

$$\vec{a} = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta \theta - v}{\Delta t} \right) \vec{\tau} + \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \sin \Delta \theta}{\Delta t} \right) \vec{\nu} \quad (1.93)$$



Rys. 67 Naturalny układ współrzędnych

⁸⁴ Przy obliczaniu granicy uwzględniono niezmiennosć wektorów $\vec{\tau}$ i $\vec{\nu}$ w sąsiedztwie punktu A (gdy $\Delta t \rightarrow 0$ to $A \leftarrow A_1$), umieszczając je poza nawiasem.

W ten sposób wyodrębniono dwie składowe przyspieszenia w naturalnym układzie współrzędnych – normalną i styczną:

$$\vec{a} = \vec{a}^s + \vec{a}^n \quad (1.94)$$

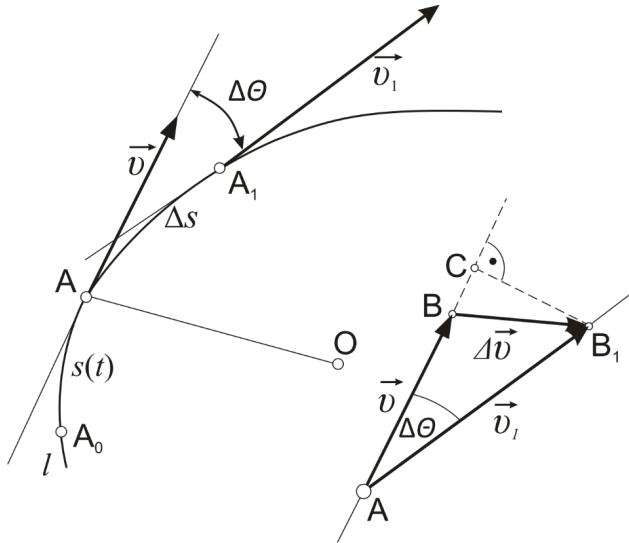
Przy założeniu, że $\Delta t \rightarrow 0$, można przyjąć, że:

- $\sin \Delta \theta \rightarrow \Delta \theta \rightarrow 0$, zaś przy $\Delta s \rightarrow 0$ ⁸⁵: $u_1 \rightarrow v$, stąd - na podstawie wzorów oraz - składowa normalna przyspieszenia punktu w ruchu krzywoliniowym (przyspieszenie normalne, przyspieszenie dośrodkowe):

$$\vec{a}^n = v \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) \left(\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right) \vec{v} = \frac{v^2}{\rho} \vec{v} \quad (1.95)$$

- $\Delta \theta \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \Delta \theta \rightarrow 1$, a wtedy $v_1 \cos \Delta \theta - v \rightarrow v_1 - v = \Delta v$, stąd składowa styczna przyspieszenia punktu w ruchu krzywoliniowym (przyspieszeniem styczne):

$$\vec{a}^s = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right) \vec{\tau} \stackrel{def}{=} \frac{dv}{dt} \vec{\tau} \quad (1.96)$$



Rys. 68 prędkość punktu w ruchu krzywoliniowym

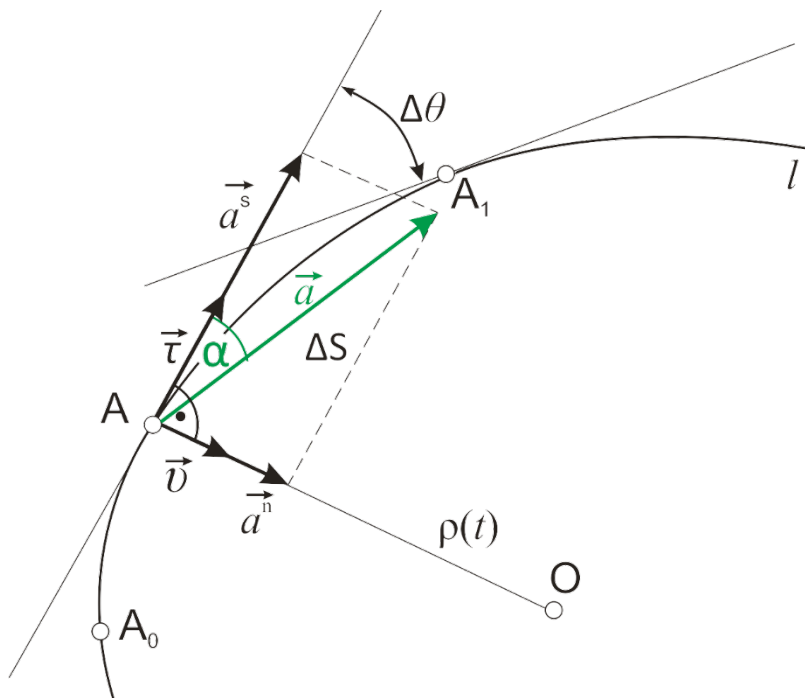
⁸⁵ W celu obliczenia granicy w pierwszym nawiasie wzoru należy pomnożyć ułamek przez $\Delta s / \Delta s = 1$; stąd druga granica we wzorze odnosi się do $\Delta s \rightarrow 0$.

Wartość całkowitego przyspieszenia punktu materialnego w ruchu krzywoliniowym, po uwzględnieniu wzorów , i wyniesie więc:

$$a = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} \quad (1.97)$$

Pomocne bywają też zależności służące do wyznaczania kąta orientacji wektora przyspieszenia $\vec{a}(t)$ (por. Rys. 69):

$$\sin \alpha = \frac{a^n}{a} \quad \wedge \quad \cos \alpha = \frac{a^s}{a} \quad (1.98)$$



Rys. 69 Przyspieszenie punktu w ruchu krzywoliniowym

2. Kinematyka ciała sztywnego



WAŻNE

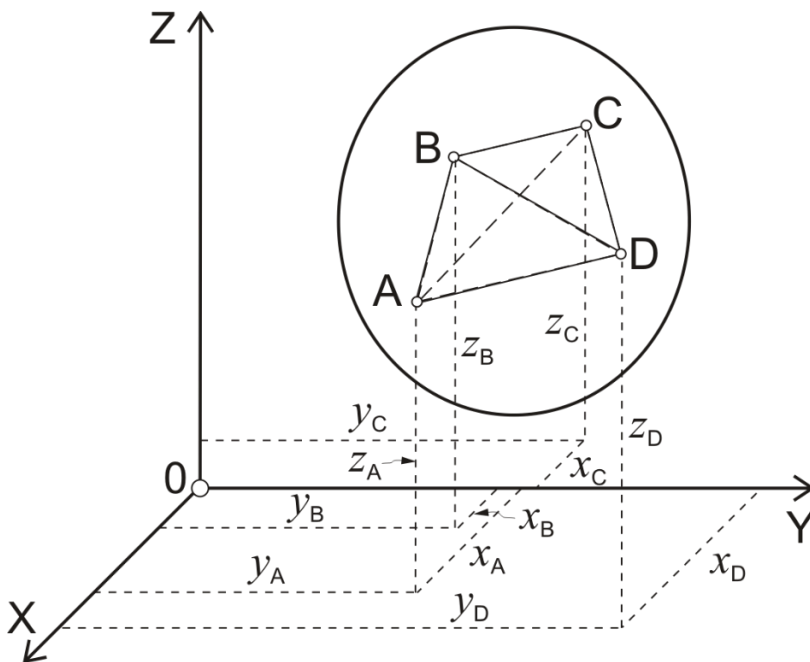
Położenie ciała sztywnego w przestrzeni można opisać za pomocą współrzędnych kartezjańskich trzech punktów tego ciała, nie leżących na jednej prostej (Rys. 70), definiując wzajemne odległości pomiędzy punktami:

$$\begin{aligned}(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 &= |\overline{AB}|^2 \\(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 &= |\overline{AC}|^2, \\(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 &= |\overline{BC}|^2\end{aligned}\quad (1.99)$$

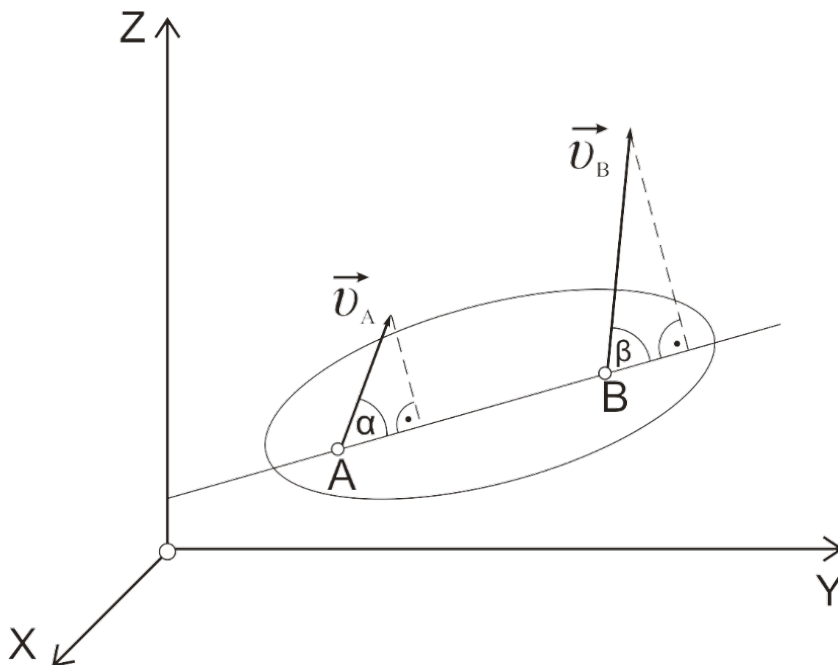
gdzie $|\overline{AB}|$, $|\overline{AC}|$ i $|\overline{BC}|$ to wzajemne (niezmienne) odległości punktów A, B i C ciała sztywnego.

Z równań wynika, że swobodne⁸⁶ ciało sztywne w przestrzeni ma 6 stopni swobody, czyli sześć możliwości ruchu – trzy translacje i trzy obroty, gdyż jest 6 niezależnych współrzędnych opisujących położenie ciała. Współrzędne te, jako wielkości zmienne w czasie, są równaniami ruchu ciała sztywnego w przestrzeni.

⁸⁶ To znaczy nie ograniczone więzami.



Rys. 70 Sposób opisu położenia ciała sztywnego w przestrzeni



Rys. 71 Ilustracja twierdzenia o rzutach prędkości



WAŻNE

Twierdzenie o rzutach prędkości⁸⁷ punktów ciała sztywnego:

Rzuty prędkości dwóch punktów ciała sztywnego na prostą przechodzącą przez te punkty (Rys. 71), są sobie równe.

Twierdzenie to wyraża się wzorem:

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta, \quad (1.100)$$

którego znaczenie zobrazowano na Rys. 71.

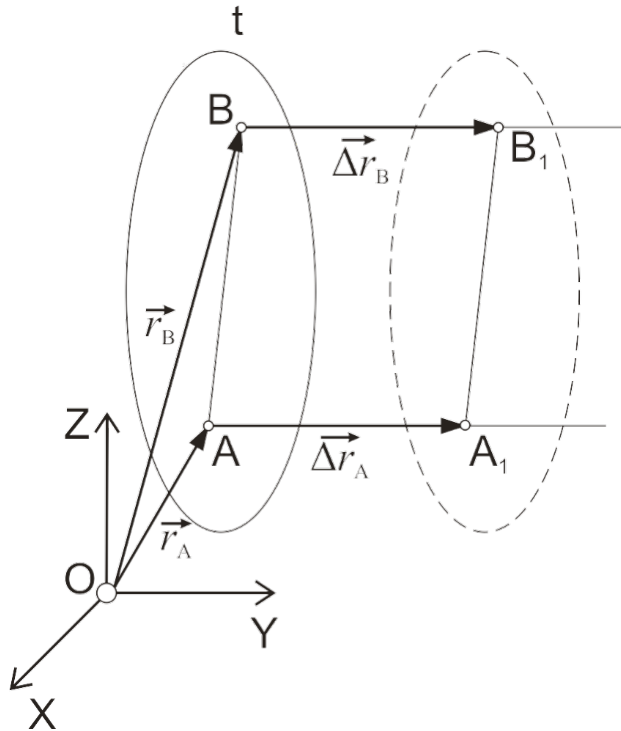
2.1. Ruch postępowy ciała sztywnego



WAŻNE

Ruch postępowy ciała sztywnego ma miejsce, gdy prosta przechodząca przez dwa punkty ciała nie doznaje obrotu, a jedynie przesunięcia równoległego (translacji).

⁸⁷ Spotykane jest też określenie „twierdzenie o prostej sztywnej”.



Rys. 72 Ciało sztywne w ruchu postępowym

Z Rys. 72 wynika, że:

$$\Delta \vec{r}_A = \Delta \vec{r}_B, \quad (1.101)$$

ze względu na przesunięcie równoległe odcinka $\overline{AB}$ (i całego ciała). Z definicji prędkości punktu wynika z kolei, że:

$$\vec{v}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_A}{\Delta t}, \quad \vec{v}_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_B}{\Delta t}, \quad (1.102)$$

stąd:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B, \quad (1.103)$$

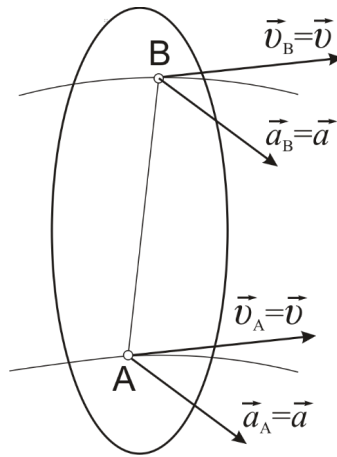
to znaczy, że **prędkości wszystkich punktów ciała sztywnego w ruchu postępowym są sobie równe.**

Podobnie, można zapisać wzory na przyspieszenia punktów ciała sztywnego jako pochodne geometryczne prędkości:

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt}, \quad \vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt}, \quad (1.104)$$

Wynika stąd, że także przyspieszenia punktów ciała sztywnego w ruchu postępowym są sobie równe:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B, \quad (1.105)$$



Rys. 73 Przyspieszenia ciała w ruchu postępowym

2.2. Ruch obrotowy ciała sztywnego



WAŻNE

Ruch obrotowy ciała sztywnego występuje, gdy dwóm punktom ciała odebrane zostały możliwości ruchu translacyjnego.

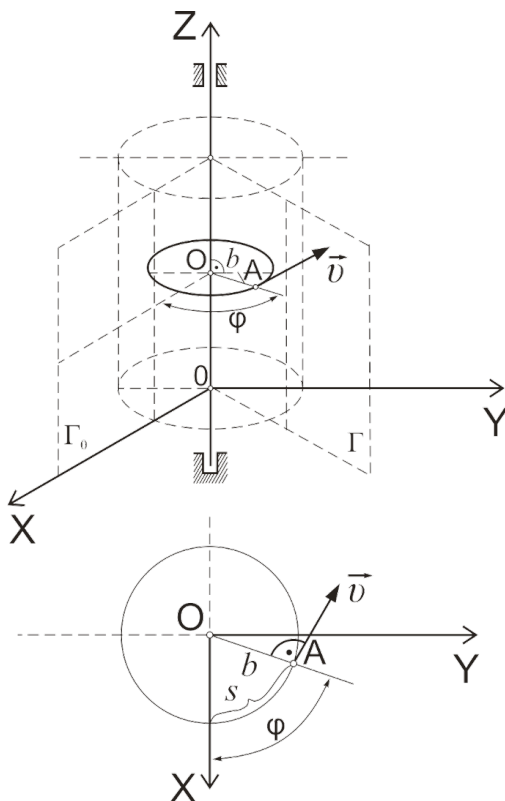
Wszystkie punkty takiego ciała poruszają się po okręgach współśrodkowych – wokół osi przechodzącej przez unieruchomione punkty (Rys. 74). Ciało w ruchu obrotowym ma więc jeden stopień swobody – wystarczy określić kąt obrotu φ [rad], a jedyne równanie ruchu obrotującego się ciała ma postać:

$$\varphi = \varphi(t), \quad (1.106)$$

Wartość chwilową **prędkości** kątowej tego ruchu oblicza się ze wzoru:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (1.107)$$

Jednostką prędkości kątowej jest oczywiście rad/s.



Rys. 74 Ciało sztywne w ruchu obrotowym

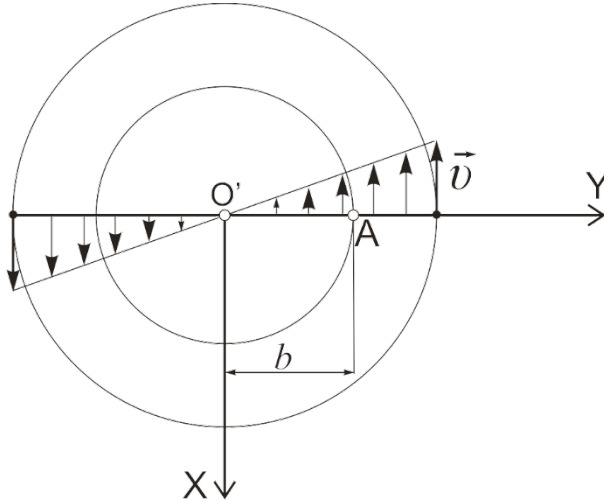
Z kolei **przyspieszenie kątowe** (chwilowe) oblicza się z zależności:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right], \quad (1.108)$$

Prędkość liniową wybranego punktu A ciała w ruchu obrotowym (Rys. 74 b) oblicza się ze wzoru:

$$v = \omega b, \quad (1.109)$$

z którego wynika liniowa zmienność wartości prędkości wzdłuż promienia b (Rys. 75); w osi obrotu prędkość ma wartość zero.



Rys. 75 Rozkład prędkości liniowej punktów obracającego się ciała sztywnego w funkcji ich odległości od osi obrotu

Przyspieszenie liniowe punktów ciała sztywnego w ruchu obrotowym można rozłożyć na składową styczną i normalną, analogicznie jak w ruchu punktu po okręgu, przy czym wartości tych składowych są funkcjami ich odległości od osi obrotu:

$$a^s = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \dot{\omega}b = \ddot{\varphi}b = \varepsilon b, \quad (1.110)$$

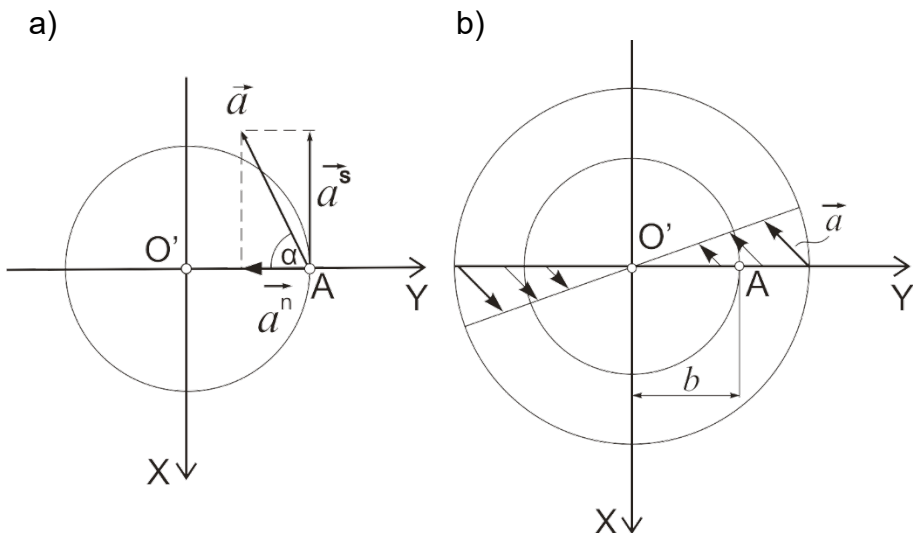
$$a^n = \frac{v^2}{b} = \omega^2 b, \quad (1.111)$$

Całkowite przyspieszenie $\vec{a}$ punktów ciała w ogólnym przypadku nie jest styczne do odnośnych okręgów, lecz nachylone do promienia b pod pewnym stałym⁸⁸ kątem α (Rys. 76), którego wartość wynika z zależności:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a^n}{a^s}, \quad (1.112)$$

Wartość całkowitego przyspieszenia liniowego punktów ciała sztywnego w ruchu obrotowym oblicza się z zastosowaniem tw. Pitagorasa:

$$a = \sqrt{(a^s)^2 + (a^n)^2}, \quad (1.113)$$



Rys. 76 Rozkład przyspieszenia liniowego punktów obracającego się ciała sztywnego w funkcji ich odległości od osi obrotu

⁸⁸ Kąt ten nie zmienia się wzdłuż promienia h , ale może zmieniać się w czasie.

Prędkość liniową i przyspieszenie liniowe można też analizować w układzie kartezjańskim, opierając się na Rys. 74b:

$$\begin{aligned} v_x &= -v \sin \varphi = -\omega b \sin \varphi \\ v_y &= v \cos \varphi = \omega b \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.114)$$

ale

$$b \cos \varphi = x, \quad b \sin \varphi = y \quad (1.115)$$

Stąd

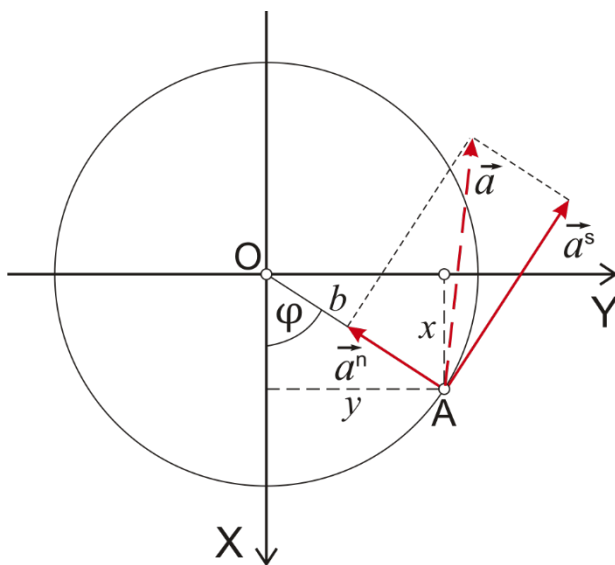
$$v_x = -\omega y = -\dot{\varphi} y, \quad v_y = \omega x = \dot{\varphi} x, \quad (1.116)$$

Składowe kartezjańskie przyspieszenia (Rys. 77) to:

$$\begin{aligned} a_x &= -a^s \sin \varphi - a^n \cos \varphi \\ a_y &= a^s \cos \varphi - a^n \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.117)$$

Po uwzględnieniu wzorów otrzymuje się:

$$\begin{aligned} a_x &= -\varepsilon y - \omega^2 x = -\ddot{\varphi} y - (\dot{\varphi}^2) x \\ a_y &= \varepsilon x - \omega^2 y = \ddot{\varphi} x - (\dot{\varphi}^2) y \end{aligned} \quad (1.118)$$



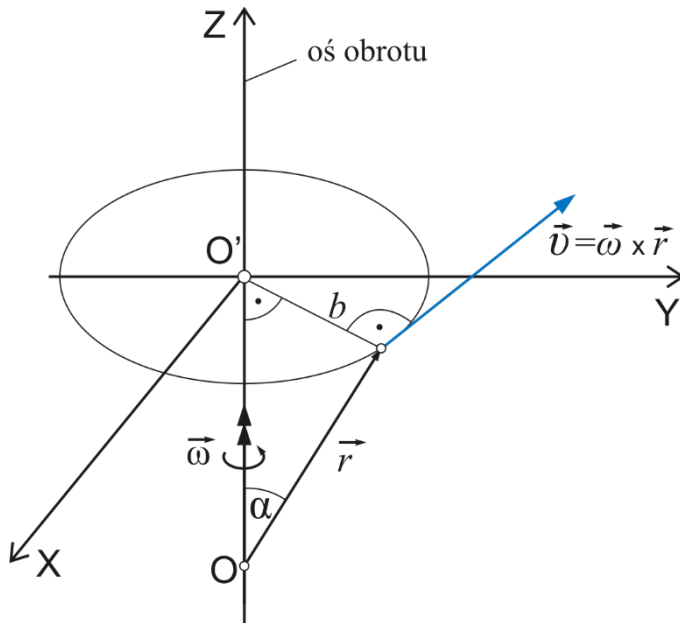
Rys. 77 Składowe prostokątne przyspieszenia punktów obracającego się ciała sztywnego

W celu sprawnego prowadzenia dalszych rozważań konieczne jest przedstawienie omówionych wyżej wielkości, oraz związków między nimi w zapisie wektorowym. I tak, wektor prędkości liniowej $\vec{v}$ dowolnego punktu A ciała sztywnego w ruchu obrotowym jest wynikiem iloczynu wektorowego prędkości kątowej $\vec{\omega}$ i promienia wektora $\vec{r}$ danego punktu A, względem dowolnego punktu O, leżącego na osi obrotu ciała (Rys. 78):

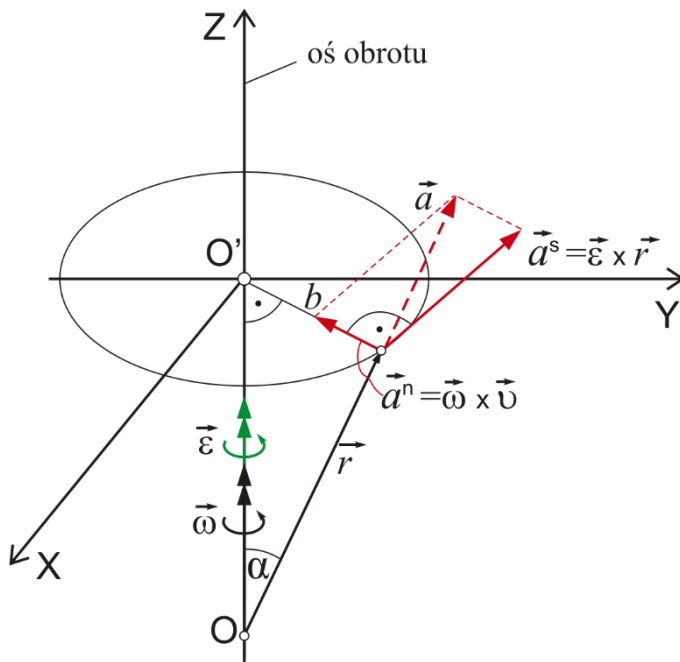
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} , \quad (1.119)$$

W przypadku przyspieszeń, należy policzyć pochodną geometryczną z prędkości liniowej wyrażonej wzorem w myśl ogólnego wzoru ; należy przy tym stosować się do reguł obliczania pochodnej iloczynu funkcji:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} , \quad (1.120)$$



Rys. 78 Prędkość kątowa a prędkość liniowa



Rys. 79 Przyspieszenie kątowe i przyspieszenie liniowe jako wektory

Uwzględniając wzór i wektorowy odpowiednik wzoru w postaci pochodnej geometrycznej wektora prędkości kątovej:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad (1.121)$$

otrzymuje się wyrażenie:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (1.122)$$

Z Rys. 79 wynika, że pierwszy iloczyn we wzorze jest wektorem stycznym do okręgu, po którym porusza się punkt A, a więc jest to składowa styczna przyspieszenia:

$$\vec{a}^s = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad (1.123)$$

Z kolei drugi iloczyn jest wektorem prostopadłym jednocześnie do $\vec{\omega}$ (a więc także do osi obrotu i do $\vec{\varepsilon}$) oraz $\vec{v}$; wektor taki musi więc działać wzdłuż promienia okręgu, a zwrot – do osi – wynika z reguły prawej dłoni (trójka prawa); jest to więc składowa normalna przyspieszenia:

$$\vec{a}^n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (1.124)^{89},$$

2.3. Szczególne przypadki ruchu obrotowego ciała sztywnego

Ruch obrotowy jednostajny

Ruch taki ma miejsce, gdy $\omega = \omega_1 = \text{const}$. Scałkowanie tego wyrażenia po czasie daje następujące równanie ruchu:

$$\varphi = \omega_1 t + \varphi_0, \quad (1.125)$$

⁸⁹ Nawias we wzorze wskazuje kolejność działań; zmiana tej kolejności byłaby błędem, gdyż iloczyn wektorowy $\vec{\omega} \times \vec{\omega}$ jest wektorem zerowym ($\sin 0 = 0$).

przy czym współrzędna kątowa początkowego położenia punktu φ_0 to stała całkowania.

Przyspieszenie kątowe (ε) w ruchu obrotowym jednostajnym równa się zero, stąd przyspieszenie styczne (liniowe, a^s) również jest zerowe. Jednakże druga składowa całkowitego przyspieszenia a^n jest różna od zera, więc:

$$a = a^n = \omega_1^2 b, \quad (1.126)$$

Ruch obrotowy jednostajnie przyspieszony⁹⁰

Opis tego ruchu wynika z dwukrotnego całkowania wyrażenia $\varepsilon = \varepsilon_1 = const$, a mianowicie:

$$\omega = \varepsilon_1 t + \omega_0, \quad (1.127)$$

gdzie stała całkowania ω_0 oznacza początkową prędkość kątową ciała. Ostatecznie:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_1 t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0 \quad (1.128)$$

Forma równań i jest analogiczna do równań ruchu postępowego jednostajnie przyspieszonego i, choć sens fizyczny wielkości jest inny.

⁹⁰ Określenie „jednostajnie przyspieszony” mówi w tym wypadku, że przyspieszenie kątowe jest stałe; jeżeli $\varepsilon < 0$ to ruch taki nazywa się opóźnionym.

2.4. Ruch płaski ciała sztywnego



WAŻNE

Ruch płaski ciała sztywnego ma miejsce gdy wszystkie punkty ciała poruszają się w płaszczyznach wzajemnie równoległych.

Oznacza to, że ruch płaski można rozumieć jako złożenie ruchu postępowego i obrotowego w jednej płaszczyźnie⁹¹.

Można przy tym wyróżnić pewną płaszczyznę równoległą do wyżej wymienionych płaszczyzn, związaną z nieruchomym (globalnym) układem odniesienia – tzw. płaszczyznę kierującą G_0 (Rys. 80).

Na rysunku tym widać, że jedna z płaszczyzn równoległych (Γ) przecina ciało sztywne w ten sposób, że można wyróżnić figurę płaską, przedstawioną na kolejnym rysunku (Rys. 81).

Z definicji ruchu płaskiego wynika, że wystarczy opisać ruch figury płaskiej w jej płaszczyźnie, aby opisać ruch całego ciała. W tym celu należy wprowadzić w punkcie A dodatkowy układ odniesienia $X'Y'$ związany z figurą płaską, którego przemieszczanie się w układzie nieruchomym XY opisuje translacje figury. Z kolei układ osi $\xi\eta$ jest sztywno związany z figurą płaską, dzięki czemu możliwy jest opis obrotu figury.

W konsekwencji figura płaska (ciało sztywne w ruchu płaskim) ma **trzy stopnie swobody**, co można wyrazić przez odnośne równania ruchu:

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad (1.129)$$

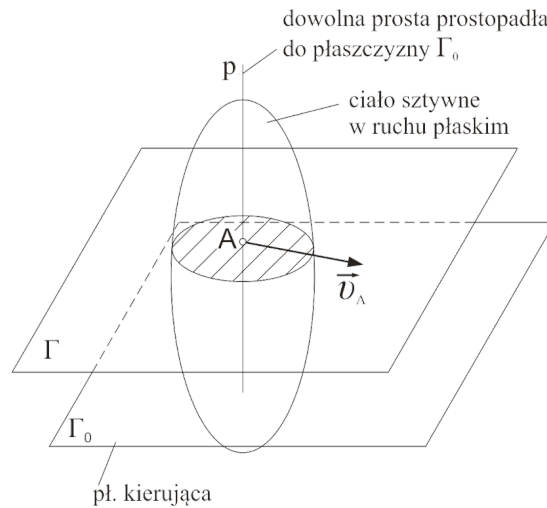
przy czym zmienna φ nosi nazwę kąta obrotu figury płaskiej.

Można wykazać, że dowolne przemieszczenie figury płaskiej w jej własnej płaszczyźnie (Γ) da się zrealizować za pomocą przeszu-

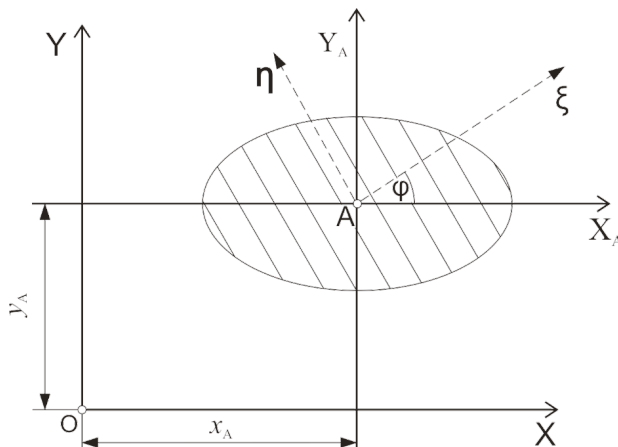
⁹¹ W myśl zasady superpozycji.

nięcia równoległego dowolnego punktu A tej figury i jej obrotu wokół tego punktu⁹², co potwierdza tezę, iż ruch płaski ciała sztywnego jest złożeniem ruchu postępowego i obrotowego w jednej płaszczyźnie.

Na tym stwierdzeniu opiera się jedna z metod wyznaczania prędkości i przyspieszeń ciała sztywnego w ruchu płaskim – **metoda superpozycji**. Inną, powszechnie stosowaną metodą, omówioną w dalszej części skryptu, jest **metoda chwilowego środka obrotu**.



Rys. 80 Ciało sztywne w ruchu płaskim

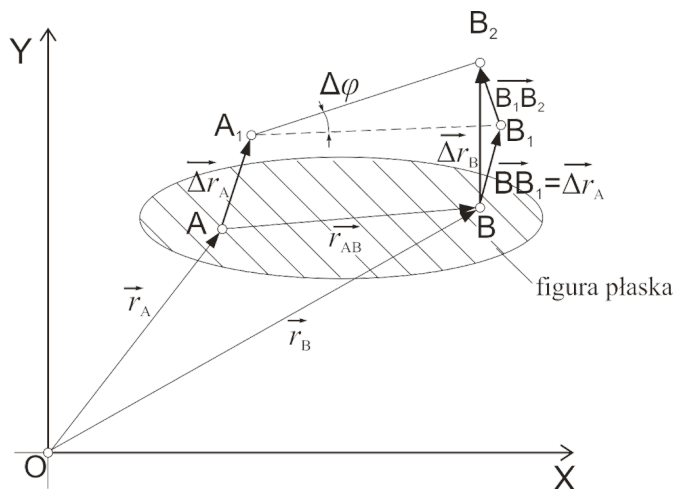


Rys. 81 Figura płaska w ruchu płaskim

⁹² Kolejność tych ruchów nie ma znaczenia, tzn. obrót może poprzedzać przesunięcie.

2.5. Prędkości ciała sztywnego w ruchu płaskim

Na Rys. 82 przedstawiono schemat zmian położenia figury płaskiej w ruchu płaskim w odstępie czasu Δt . Opis przemieszczania się punktów A i B figury za pomocą odpowiednich promieni-wektorów umożliwia wyznaczenie prędkości według ogólnego wzoru .



Rys. 82 Ilustracja metody superpozycji w odniesieniu do prędkości w ruchu płaskim

Przyrosty wektorowe promieni-wektorów związane są zależnością:

$$\Delta \vec{r}_B = \Delta \vec{r}_A + \overline{B_1 B_2} \quad (1.130)$$

Obrót figury płaskiej wokół punktu A o niewielki kąt $\Delta \varphi$ można wyrazić poprzez tzw. wektor małego obrotu $\Delta \vec{\theta}$, mający tę właściwość, że:

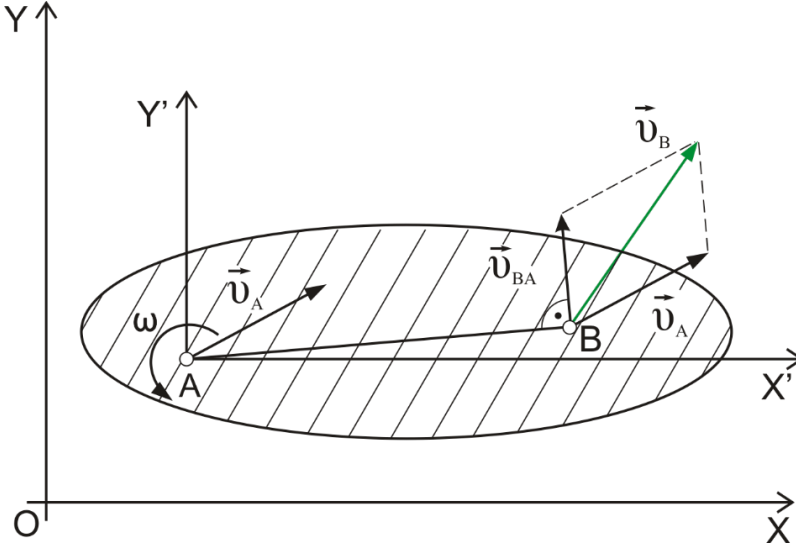
$$|\Delta \vec{\theta}| = |\Delta \varphi| \quad (1.131)$$

Dzięki temu można opisać przyrost dowolnego promienia-wektora ogólnym wzorem:

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{\theta} \times \vec{r} \quad (1.132)$$

Wzór przyjmie wówczas postać:

$$\Delta \vec{r}_B = \Delta \vec{r}_A + \Delta \vec{\theta} \times \vec{r}_{AB} \quad (1.133)$$



Rys. 83 Prędkości w ruchu płaskim

Następnie, dzieląc stronami wzór przez Δt i przechodząc do granicy otrzymuje się:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_A}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\theta}}{\Delta t} \times \vec{r}_{AB}, \quad (1.134)$$

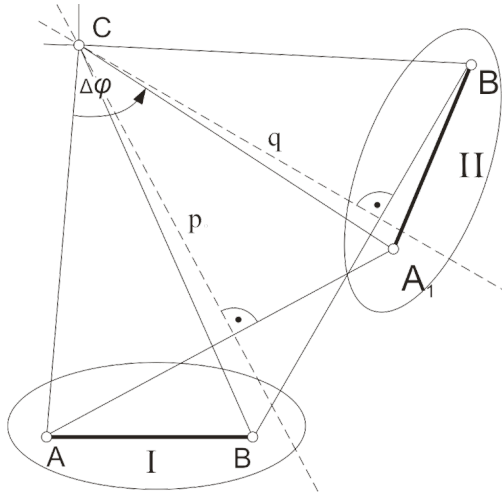
przy czym $\vec{r}_{AB} = \text{const}$. Na mocy wzoru pierwsze dwie granice to prędkości punktów, odpowiednio B i A, zaś trzecia granica odpowiada prędkości kątowej, stąd zależność pomiędzy prędkościami punktów figury płaskiej:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \quad (1.135)$$

Interpretację iloczynu wektorowego występującego w wyrażeniu podaje Rys. 83, na którym pojawia się wektor prędkości $\vec{v}_{BA}$ punktu B w jego lokalnym (w układzie $X'Y'$) ruchu obrotowym wokół punktu A:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \quad (1.136)$$

Wartość tej prędkości to $v_{BA} = \omega |\overline{AB}|^{93}$.



Rys. 84 Chwilowy środek obrotu



WAŻNE

Metoda chwilowego środka obrotu opiera się na pierwszym twierdzeniu Eulera:

Dowolne przemieszczenie figury płaskiej w jej płaszczyźnie może zostać wykonane za pomocą samego tylko obrotu wokół pewnego punktu, zwanego środkiem obrotu.

⁹³ Jest to wartość iloczynu wektorowego wzajemnie prostopadłych wektorów $\vec{\omega}$ i $\vec{r}_{AB}$, dla których $\sin\alpha=1$.

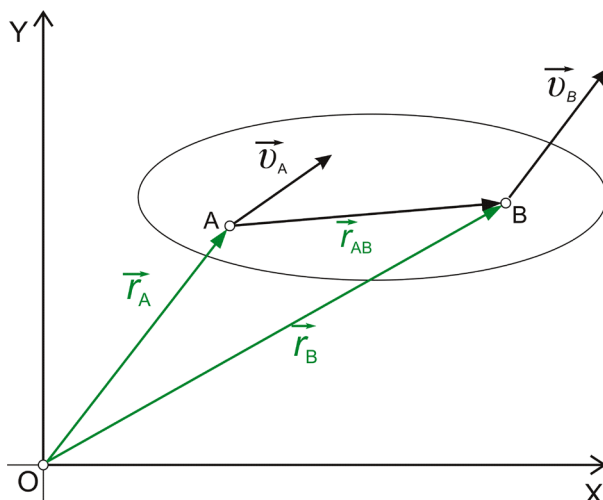
Jak pokazano na Rys. 84, zamiast dokonywać translacji i obrotu można ograniczyć się do samego obrotu⁹⁴ wokół punktu C, będącego środkiem obrotu. Punkt ten może zmieniać swoje położenie w czasie i wtedy mówi się o **chwilowym środku obrotu**, a linia łącząca kolejne położenia w czasie punktu C nazywa się **centroidą**.

Wyznaczenie położenia chwilowego środka obrotu, sprowadza się do wystawienia linii normalnych do prędkości rozważanych punktów ciała sztywnego – punkt C będzie leżał na ich przecięciu. Następnie należy wyznaczyć odległości AC i BC z zależności geometrycznych, obliczyć wartości poszukiwanych prędkości (liniowych lub kątowych) stosując zależności w rodzaju .

2.6. Przyspieszenia ciała sztywnego w ruchu płaskim

W celu wyznaczenia przyspieszeń punktów ciała sztywnego w ruchu płaskim, należy zastosować ogólny wzór do wyrażenia prędkości figury płaskiej w formie ; otrzymuje się wówczas:

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) \quad (1.137)$$



Rys. 85 Prędkości w ruchu płaskim

⁹⁴ Mówi się tutaj o niewielkim obrocie – o mały kąt $\Delta\varphi$ (Rys. 84).

Po uwzględnieniu zależności i oraz zasad różniczkowania iloczynu funkcji otrzymuje się:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} \quad (1.138)$$

Można wykazać, że ostatni wyraz w powyższym wzorze to różnica prędkości punktów B i A figury płaskiej; z Rys. 82 i Rys. 85 wynika bowiem:

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad (1.139)$$

Stąd

$$\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \quad (1.140)$$

Porównując ten ostatni wzór ze wzorem można zapisać:

$$\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \quad (1.141)$$

Teraz wzór przyjmuje postać:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}), \quad (1.142)$$

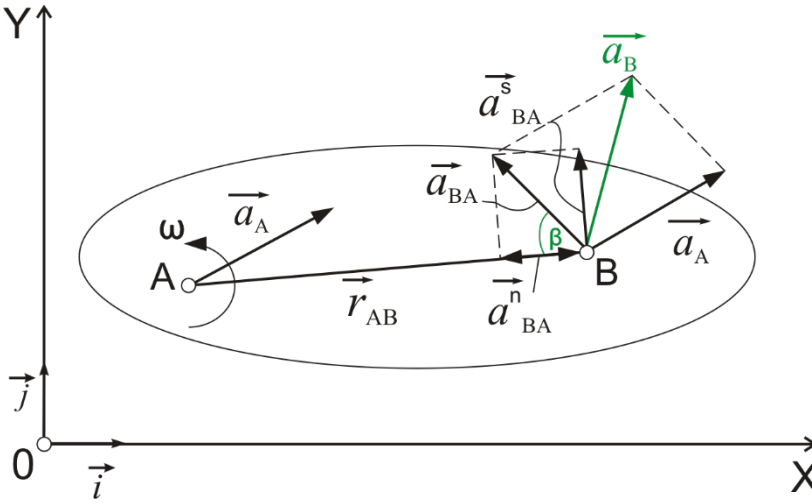
w której występują trzy oddzielne człony, w tym dwa wymagające interpretacji fizycznej. Pomocny jest w tym Rys. 86. Wynika z niego, że człon drugi jest prostopadły do lokalnego promienia-wektora $\vec{r}_{AB}$ i leży w płaszczyźnie rysunku (wektor $\vec{\varepsilon}$ jest prostopadły do płaszczyzny X'Y', podobnie jak $\vec{\omega}$)⁹⁵, a więc musi to być składowa styczna przyspieszenia punktu B w lokalnym ruchu obrotowym względem punktu (bieguna) A:

⁹⁵ Zwrot wektora przyspieszenia kąowego $\vec{\varepsilon}$ może być zgodny z $\vec{\omega}$ lub przeciwny, ale zawsze te wektory są równoległe; można przyjąć, że obydwa wychodzą z płaszczyzny Rys. 86 (jeśli $\varepsilon > 0$), ale są to tzw. wektory swobodne, które można dowolnie przesuwac po płaszczyźnie X'Y' (wartość $\vec{\omega}$ nie zależy od obranego bieguna).

$$\vec{a}_{BA}^s = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB}, \quad (1.143)$$

Z kolei człon trzeci wyrażenia musi być wektorem o linii działania pokrywającej się z kierunkiem $\vec{r}_{AB}$, zwróconym w stronę punktu A. Oznacza to, że jest to składowa normalna (dośrodkowa) przyspieszenia punktu B względem A:

$$\vec{a}_{BA}^n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}), \quad (1.144)$$



Rys. 86 Przyspieszenia w ruchu płaskim

Ostatecznie można zapisać wyrażenie w skróconej postaci:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \quad (1.145)$$

stwierdzając przy tym, że:

przyspieszenie dowolnego punktu figury płaskiej poruszającej się ruchem płaskim w swojej płaszczyźnie równa się sumie przyspieszenia dowolnie obranego bieguna A oraz przyspieszenia punktu B w lokalnym ruchu obrotowym względem tego bieguna.

Ponadto słuszne są zależności:

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^s, \quad (1.146)$$

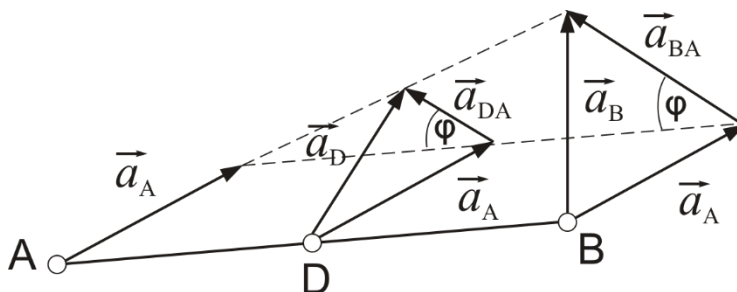
oraz

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^s)^2} = r_{AB} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (1.147)$$

Kierunek przyspieszenia $\vec{a}_{BA}$ wyznacza się, zgodnie z Rys. 86, ze wzoru:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_{BA}^s}{a_{BA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (1.148)$$

Schemat rozkładu przyspieszeń figury płaskiej dla punktów leżących pomiędzy A i B przedstawiono na Rys. 87. Podobnie jak w przypadku ruchu obrotowego ciała sztywnego, istnieje pewien ustalony kąt nachylenia wektora przyspieszenia do promienia-wektora $\vec{r}_{AB}$.



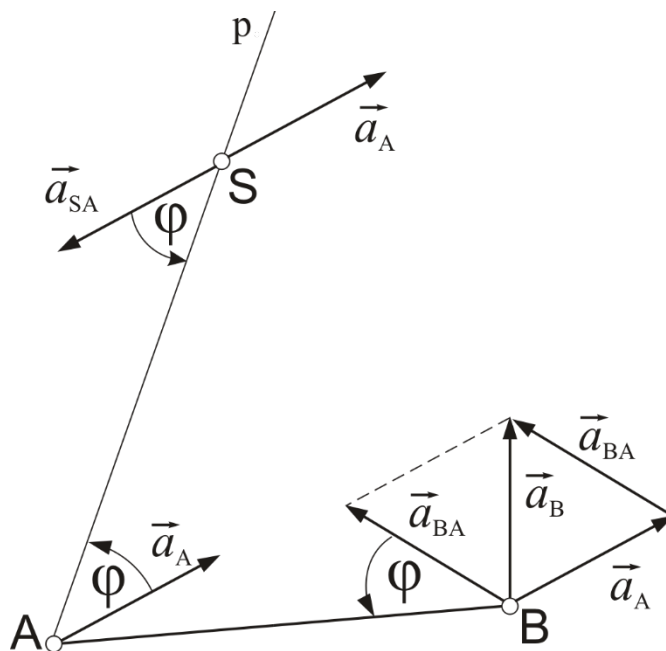
Rys. 87 Przyspieszenia w ruchu płaskim

Jednakże - w odróżnieniu od sytuacji przedstawionej na Rys. 76b – tym razem jest to jedynie pewna składowa ($\vec{a}_{BA}$, $\vec{a}_{DA}$ itd.) ogólnego przyspieszenia ($\vec{a}$), związana z lokalnym ruchem obrotowym.

Można dalej wykazać, że istnieje na płaszczyźnie $X'Y'$ taki punkt S^{96} , w którym przyspieszenie w danej chwili ma wartość zero (Rys. 88). Punkt ten, przez analogię do chwilowego środka obrotu nazywa się **chwilowym środkiem przyspieszeń**, zaś miejsce geometryczne wszystkich takich punktów⁹⁷ na płaszczyźnie ruchu nosi nazwę **aksoidy**.

⁹⁶ Punkt ten może należeć do rozpatrywanej figury płaskiej.

⁹⁷ Linia łącząca kolejne położenia chwilowego środka przyspieszeń.



Rys. 88 Dowód istnienia chwilowego środka przyspieszeń

Położenie punktu S na prostej p można wyznaczyć z zależności , zapisanej dla odcinka $\overline{AS}$:

$$a_{SA} = r_{AS} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} , \quad (1.149)$$

i przyjmując założenie, że całkowite przyspieszenie $a_S = 0$.

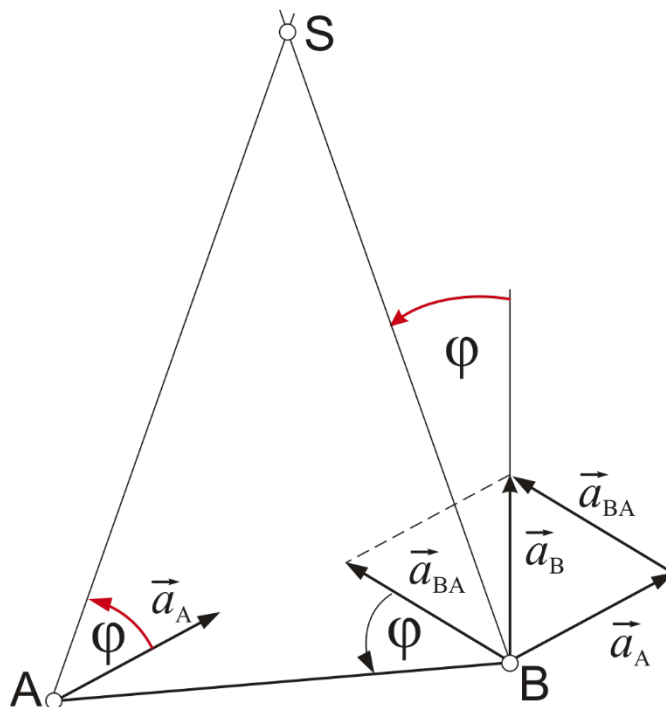
Ponieważ zwroty przyspieszeń $\vec{a}_A$ i $\vec{a}_{SA}$ w punkcie S są przeciwne, słuszny jest zapis, wynikający z :

$$0 = a_A - a_{SA} \quad (1.150)$$

Stąd

$$r_{AS} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} , \quad (1.151)$$

Rys. 89 pokazuje ogólny sposób wyznaczania chwilowego środka przyspieszeń (S), na przykładzie omawianego wcześniej przypadku punktów A i B figury płaskiej.



Rys. 89 Ogólny sposób znajdowania chwilowego środka przyspieszeń

3. Przykłady zadań z kinematyki z rozwiązaniami

Przykład K.1

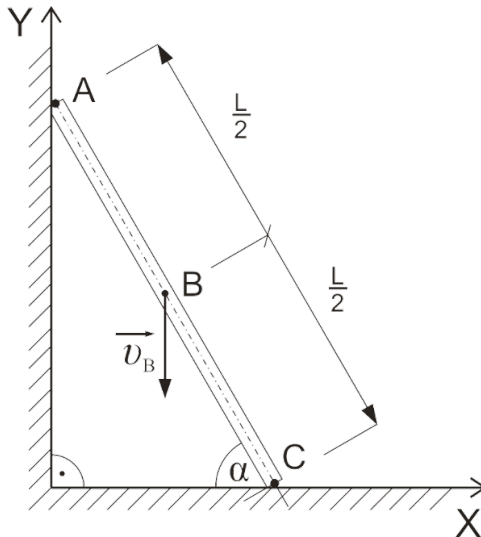
Sztywny pręt o długości L oparto o gładką ścianę i gładką podłogę, przy czym w chwili początkowej pręt tworzył z podłogą kąt α (Rys. 90). Następnie nadano prętowi prędkość $v_B = \text{const}$ w środku jego długości (punkt B). Przy czym $\vec{v}_B$ jest stale pionowa do osi pręta. Obliczyć prędkość punktów A i C pręta w funkcji kąta α aż do chwili jego upadku na podłogę⁹⁸. Dane: $L=2\text{m}$, $\alpha = 75^\circ$, $v_B = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Rozwiązanie.

Kierunek prędkości $\vec{v}_A$ jest pionowy, a $\vec{v}_C$ poziomy. Na mocy twierdzenia o rzutach prędkości można zapisać

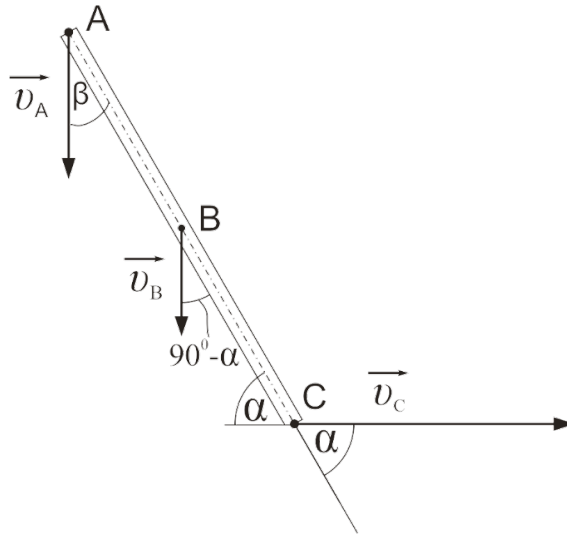
$$v_B \cos \beta = v_A \cos \beta \quad \wedge \quad v_B \cos \beta = v_C \cos \alpha$$

Stąd $v_A = v_B$ i $v_C = v_B \tan \alpha$, gdyż $\cos \beta = \sin \alpha$.



Rys. 90 Schemat obliczeniowy do przykładu K.1

⁹⁸ Wtedy $\vec{v}_A$ zmienia kierunek na poziomy.



Rys. 91 Rozkład prędkości pręta

Po podstawieniu do tych wzorów danych liczbowych dla chwili początkowej ($t=0$): otrzymuje się prędkości początkowe punktów A i C:

$$v_{A0} = v_B = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_C = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \tan 75^\circ \cong 14,9 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

zaś prędkości końcowe, dla $\alpha = 0^\circ$ wyniosą:

$$v_{Ak} = v_B = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_{Ck} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Przykład K.2

Do koła o promieniu $R=35\text{cm}$, wykonującego ruch obrotowy, przymocowano zakończony przegubami pręt AB o długości $2R$ (Rys. 92), ustawiony początkowo nieruchomo w pozycji poziomej. Wyznaczyć zależność prędkości $\bar{v}_B$ wozdika od czasu t , jeżeli przyspieszenie kątowe koła jest stałe i wynosi $\varepsilon = 1,23 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Określić też całkowitą drogę, jaką pokona wozdik w czasie $t=9\text{ s}$.

Rozwiązanie.

Prędkość liniowa przegubu A jest stale styczna do okręgu koła, a prędkość wozika ma stale kierunek poziomy. Jak pokazano na Rys. 93, można znaleźć punkt C, będący chwilowym środkiem obrotu, rysując linie prostopadłe do wektorów prędkości punktów A i B w danym położeniu układu. Wartość prędkości $\bar{v}_A$ można obliczyć z zależności:

$$v_A = \omega \cdot R,$$

przy czym prędkość kątową oblicza się całkując przyspieszenie kątowe:

$$\omega(t) = \int \varepsilon dt = \varepsilon t + C_1$$

Wartość stałej początkowej wynika z warunku początkowego $t=0$: $\omega=0$ (pręt był początkowo nieruchomy)

$$C_1 = 0$$

Funkcja prędkości przegubu A będzie więc miała postać:

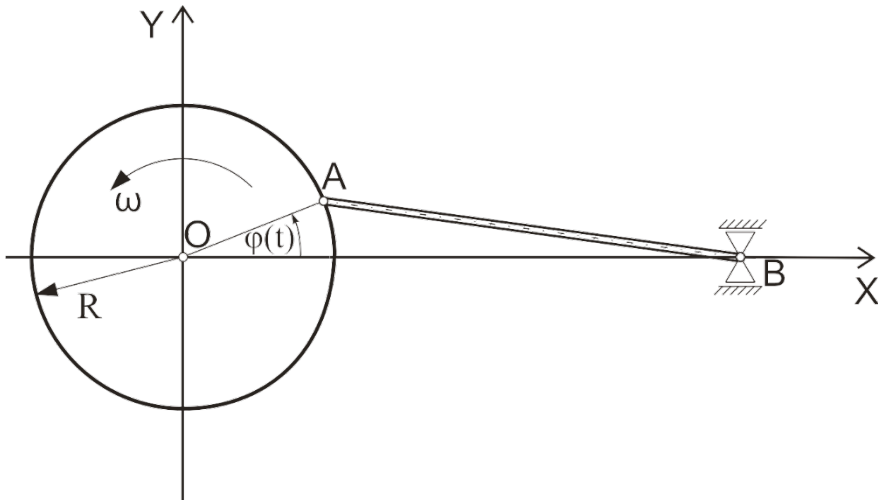
$$v_A(t) = R\varepsilon t$$

W celu obliczenia prędkości wozika należy zapisać pewne zależności geometryczne, wynikające z Rys. 93, Jak wynika z danych zadania: $|\overline{AB}| = 2R$. Stosując twierdzenie sinusów do $\triangle OAB$ można zapisać:

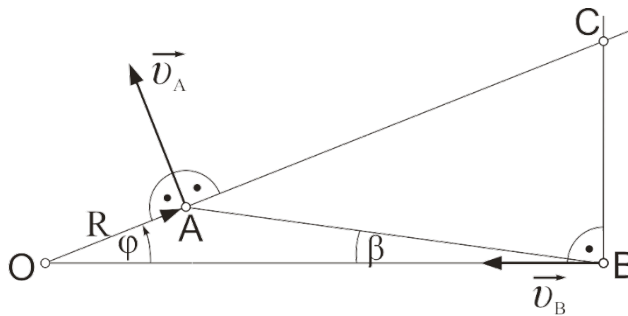
$$\frac{R}{\sin \beta} = \frac{2R}{\sin \varphi}$$

Stąd zależność kąta β od czasu:

$$\beta(t) = \arcsin\left(\frac{1}{2 \sin \varphi(t)}\right)$$



Rys. 92 Schemat obliczeniowy do przykładu K.2



Rys. 93 Rozkład prędkości mechanizmu z przykładu K.2

Odległość wodzika od środka koła zmienia się w czasie zgodnie z zależnością:

$|\overline{OB}| = \sqrt{5R^2 - 2R^2 \cos \varphi(t)} = R\sqrt{5 - 2 \cos \varphi(t)}$, zaś odległość punktu B od chwilowego środka obrotu wynosi:

$$|\overline{BC}| = |\overline{OB}| \operatorname{tg} \varphi = R \operatorname{tg} \varphi \sqrt{5 - 2 \cos \varphi(t)}$$

Długość przeciwprostokątnej w $\triangle OBC$ to:

$$|\overline{OC}| = \sqrt{|\overline{OB}|^2 + |\overline{BC}|^2} = \sqrt{R^2 (5 - 2 \cos \varphi(t)) \cdot (1 + \tan^2 \varphi(t))} = \frac{R}{\cos \varphi(t)} \sqrt{5 - 2 \cos \varphi(t)}$$

Teraz można obliczyć odległość przegubu A od punktu C:

$$|\overline{AC}| = |\overline{OC}| - R = R \left(\frac{\sqrt{5 - 2 \cos \varphi(t)}}{\cos \varphi(t)} - 1 \right)$$

Prędkość liniowa punktu A związanego z kołem, jest jednocześnie prędkością jednego z końców pręta AB, stąd:

$R\epsilon t = \omega_{AB} |\overline{AC}|$, przy czym ω_{AB} to prędkość kątowna pręta AB wokół chwilowego środka obrotu C, która wynosi:

$$\omega_{AB} = \frac{R\epsilon t}{|\overline{AC}|} = \frac{\epsilon t}{\left(\frac{\sqrt{5 - 2 \cos \varphi(t)}}{\cos \varphi(t)} - 1 \right)}$$

Można teraz zapisać funkcję prędkości ruchu postępowego wozika od czasu:

$$v_B = \omega_{AB} |\overline{BC}| = \frac{\epsilon t}{\left(\frac{\sqrt{5 - 2 \cos \varphi(t)}}{\cos \varphi(t)} - 1 \right)} \cdot R \tan \varphi \sqrt{5 - 2 \cos \varphi(t)} = \frac{R\epsilon t \sin \varphi(t) \sqrt{5 - 2 \cos \varphi(t)}}{\sqrt{5 - 2 \cos \varphi(t)} - \cos \varphi(t)}$$

Należy jeszcze obliczyć drogę wozika w czasie $t=9$ s. Droga, jaką wozik pokonuje w czasie jednego obrotu koła to $s'_B = 4R = 1,4$ m.

Koło w tym czasie wykonuje $n = \frac{\varphi(t=9 \text{ s})}{2\pi}$ obrotów⁹⁹. Funkcję $\varphi(t)$ wyznacza się całkując względem czasu wyrażenie na prędkość kątową koła:

⁹⁹ Kąt φ należy podstawić w radianach.

$$\varphi(t) = \int \varepsilon t dt = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + C_2$$

Stała $C_2=0$, gdyż w chwili początkowej pręt AB był poziomy ($t=0$: $\varphi=0$), stąd:

$$\varphi(t=9\text{ s}) = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \Big|_{t=9} \cong 49,8 \text{ rad}$$

Wynika stąd liczba obrotów koła (n) oraz całkowita droga wozzika (s_B):

$$n = \frac{49,8}{2\pi} \cong 7,9 \text{ obr} \Rightarrow s_B = n \cdot s'_B \cong 11,1 \text{ m}$$

Końcowe wartości prędkości kątowej koła oraz prędkości liniowych punktów A i B Czytelnik obliczy samodzielnie.

Przykład K.3

Na bębnie o promieniu R zamocowano spiralnie wygiętą blachę (Rys. 94). Promień spirali wzrasta o wielkość a w czasie jednego obrotu mając daną funkcję prędkości kątowej $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ wyznaczyć równanie ruchu ciężarka o masie m podłączonego w punkcie A, w zakresie $\varphi \in (0, 2\pi)$.

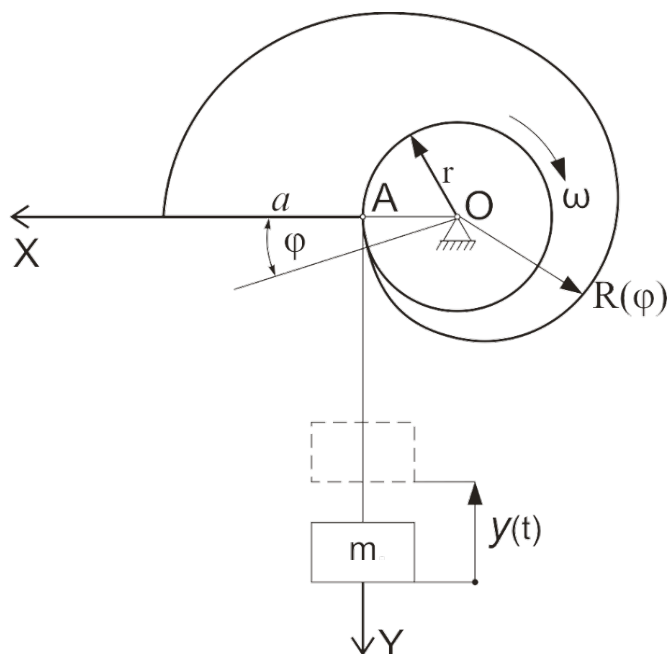
Rozwiązanie.

Kąt obrotu bębna $\varphi(t)$ wynosi

$$\varphi(t) = \int \omega dt = 2t + C_1$$

Stała całkowania dla warunku początkowego $t=0$: $\varphi=0$ wynosi $C_1=0$ Stąd rozwiązanie szczególne:

$$\varphi(t) = 2t$$



Rys. 94 Schemat obliczeniowy do przykładu K.3

Wartość promienia spirali w funkcji kąta obrotu oblicza się ze wzoru:

$$R(\varphi) = r + \frac{a}{2\pi} \cdot \varphi$$

Droga obciążnika w funkcji czasu, a zarazem jego równanie ruchu:

$$L = y(t) = R(\varphi) \cdot \varphi = r\varphi + \frac{a}{2\pi} \cdot \varphi^2 = 2\pi r t + \frac{2a}{\pi} t^2,$$

Z powyższego równania wynika też długość spirali (dla $\varphi = 2\pi$):

$$L(2\pi) = 2\pi r + 2\pi a = 2\pi(r + a)$$

Jest to jednocześnie całkowita długość drogi obciążnika.

Przykład K.4

Dane są równania ruchu punktu materialnego:

$$\begin{cases} x(t) = 2 \sin^2 3t \\ y(t) = -4 \cos 3t \end{cases}$$

Przeanalizować ruch tego punktu; wyznaczyć tor punktu; obliczyć prędkość i przyspieszenie w funkcji czasu.

Rozwiązanie.

1) Tor

W celu wyznaczenia równania toru należy z równania ruchu wyrugować czas. W przypadku równań podanych wyżej można skorzystać z twierdzenia jedynki trygonometrycznej: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Wtedy:

$$\frac{x}{2} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Torem jest więc parabola o równaniu:

$$x = -\frac{1}{8}y^2 + 2$$

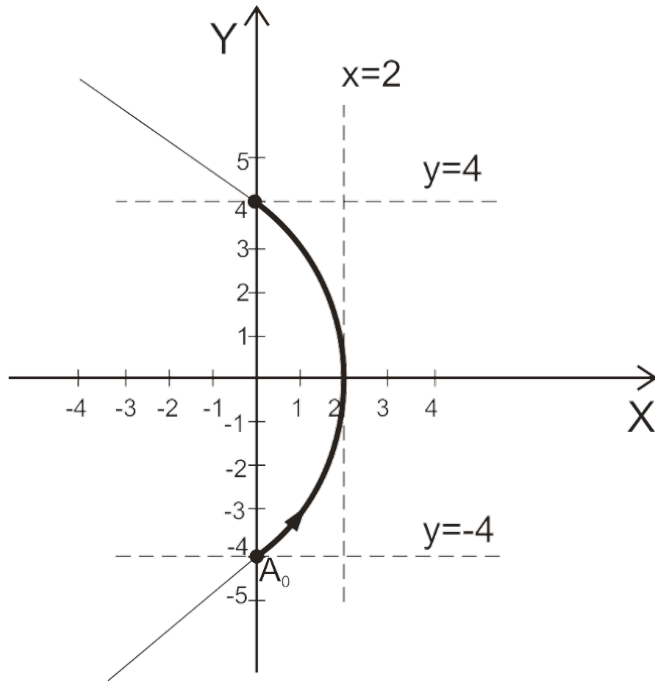
Rys. 95 przedstawia ogólny kształt toru; należy jednak odnieść się ponownie do równania ruchu, aby wyznaczyć rzeczywisty fragment toru – asymptoty $x=2$, $y=\pm 4$.

2) Punkt początkowy ruchu

Dla $t=0$ z równań ruchu wynika $x(0) = 0$, $y(0) = -4$, stąd $A_0 = (0, -4)$.

3) Zwrot ruchu w chwili początkowej

Dla $t=0$: gdy $t \rightarrow 0$ to $x(t) \rightarrow 0$ i $y(t) \rightarrow -4$, a stąd wniosek, że zwrot ruchu jest w górę w prawo.



Rys. 95 Rysunek do przykładu K.4

4) Prędkość

$$v_x = \dot{x} = 12 \sin 3t \cos 3t (= 6 \sin 6t)^{100}$$

$$v_y = 12 \sin 3t$$

$$v = 12 \sin 3t \sqrt{\cos^2 3t + 1}$$

5) Przyspieszenie

$$a_x = \ddot{x} = 36 \cos 6t$$

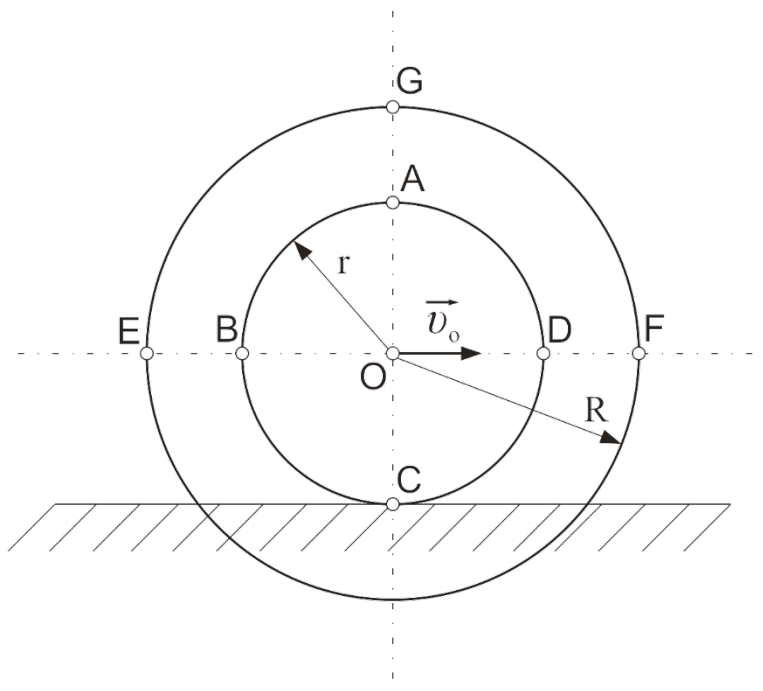
$$a_y = \ddot{y} = 36 \cos 3t$$

$$a = 36 \sqrt{\cos^2 6t + \cos^2 3t} = 36 \sqrt{2 \cos^2 3t - \sin^2 3t}$$

¹⁰⁰ Podwojenie argumentu funkcji trygonometrycznej oznacza, że częstość zmian v_x jest dwa razy większa niż v_y .

Przykład K.5

Obliczyć prędkości punktów A, B, D, E, F, G i H koła wagonu, toczącego się bez poślizgu po płaskiej poziomej szynie (Rys. 96), jeżeli prędkość osi wagonu w ruchu postępowym wynosi $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a proporcja promieni koła to $\frac{R}{r} = 1,2$.



Rys. 96 Schemat obliczeniowy do przykładu K.5

Rozwiązanie.

Zadanie to można rozwiązać między innymi metodą chwilowego środka obrotu; punktem takim jest punkt C. Odkładając z tego punktu promienie do punktów, których prędkości mają zostać wyznaczone (Rys. 97), trzeba następnie narysować wektory prędkości prostopadłe do promieni. Zachowując proporcje można więc zadanie to rozwiązać wykreślnie. Poniżej przedstawiono obliczenia analityczne.

$$\frac{v_A}{v_0} = \frac{2r}{r} \Rightarrow v_A = 2v_0 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Podobnie:

$$\frac{v_G}{v_0} = \frac{R+r}{r} \Rightarrow v_G = v_0 \frac{R+r}{r} = v_0 \left(\frac{R}{r} + 1 \right) = 44 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Można zauważyć, że:

$$v_B = v_D \quad \wedge \quad v_E = v_F$$

Pozostaje tylko wyznaczyć proporcje odpowiednich odcinków, aby obliczyć wartości tych prędkości:

$$|\overline{BC}| = |\overline{CD}| = \sqrt{2}r$$

Stąd

$$v_B = v_D = \sqrt{2}v_0 \cong 28,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Podobnie

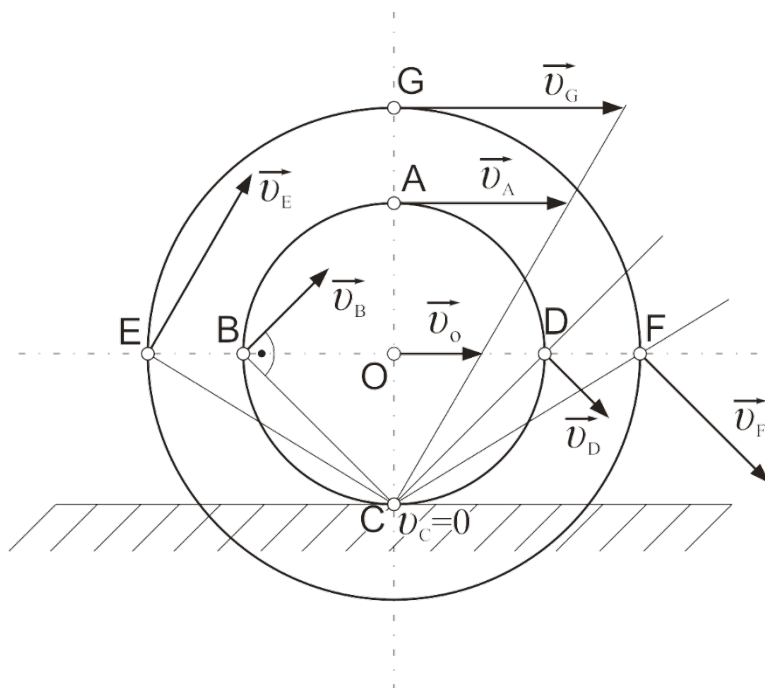
$$|\overline{CE}| = |\overline{CF}| = \sqrt{R^2 + r^2},$$

a po zastosowaniu proporcji

$$\frac{v_E}{v_0} = \frac{v_F}{v_0} = \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r} = \sqrt{\frac{R^2}{r^2} + 1}$$

ostatecznie otrzymuje się:

$$v_E = v_F = v_0 \sqrt{\frac{R^2}{r^2} + 1} \cong 31,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Rys. 97 Rozkład prędkości koła wagonu

4. Pytania testowe



1. **W kinematyce – siły to:**
 - a. podstawowe przyczyny ruchu
 - b. pochodne prędkości
 - c. siły nie występują w kinematyce
2. **Naturalny układ współrzędnych to:**
 - a. układ związany ze styczną i normalną do toru w danym punkcie
 - b. układ bezwładnościowy
 - c. układ kartezjański (prostokątny układ współrzędnych)
3. **Prędkość liniowa punktu to:**
 - a. pochodna lokalna prędkości kątowej
 - b. pochodna geometryczna promienia-wektora
 - c. pochodna wektora stycznego $\vec{v}$
4. **Hodograf prędkości to inaczej:**
 - a. tor punktu
 - b. wektor prostopadły do promienia-wektora
 - c. linia styczna do wektora przyspieszenia
5. **Wektor przyspieszenia można zapisać jako pochodną wektora prędkości:**
 - a. zawsze
 - b. tylko w ruchu płaskim
 - c. pod warunkiem zerowania się prędkości kątowej
6. **Stałe całkowania w zagadnieniach kinematyki wyznacza się z warunków:**
 - a. równowagi ciał
 - b. początkowych
 - c. brzegowych
7. **Ruch harmoniczny prosty to:**
 - a. ruch punktu po okręgu
 - b. ruch wahadła matematycznego
 - c. ruch cykliczny po linii prostej



- 8. Pulsacja ruchu harmonicznego jest równoważna z:**
- częstotliwością
 - częstotliwością
 - częstotliwością
- 9. Okres ruchu harmonicznego to:**
- całkowity czas trwania ruchu
 - odwrotność częstości
 - odwrotność pulsacji
- 10. Faza początkowa ruchu harmonicznego to:**
- składowa stała argumentu funkcji trygonometrycznej opisującej ten ruch
 - położenie punktu w chwili początkowej
 - wartość początkowa siły wywołującej ruch
- 11. Przyspieszenie punktu w ruchu harmonicznym osiąga wartości skrajne:**
- w punktach skrajnych
 - w środku ruchu harmonicznego
 - przyspieszenie w ruchu harmonicznym jest stałe
- 12. Prędkość punktu w ruchu harmonicznym ma wartość zero:**
- zawsze
 - w położeniach skrajnych
 - nigdy
- 13. Promień krzywizny linii:**
- jest prostopadły do tej linii
 - leży na binormalnej, w płaszczyźnie linii
 - ma stałą wartość
- 14. Normalna główna to linia:**
- prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznej
 - prostopadła do płaszczyzny prostującej
 - normalna do płaszczyzny normalnej



15. Płaszczyzna ściśle styczna:

- a. jest śladem płaszczyzny prostującej w płaszczyźnie normalnej
- b. jest prostopadła do wersora normalnego
- c. zawiera wersor normalny i wersor styczny

16. Binormalna to inaczej:

- a. linia normalna zarówno do płaszczyzny normalnej, jak i płaszczyzny prostującej
- b. ślad płaszczyzny normalnej w płaszczyźnie prostującej
- c. linia równoległa do normalnej głównej

17. Wartość przyspieszenia punktu w ruchu jednostajnym krzywoliniowym:

- a. wynosi zero
- b. sprowadza się do wartości przyspieszenia stycznego
- c. sprowadza się do wartości przyspieszenia normalnego

18. W ruchu obrotowym ciała sztywnego:

- a. prędkość kątowna jest stała
- b. wartość prędkości liniowej zmienia się wzdłuż odległości od osi obrotu
- c. nie występuje przyspieszenie Coriolisa

19. Prędkości dwóch punktów ciała sztywnego w ruchu płaskim:

- a. mogą mieć różne kierunki
- b. są prostopadłe do centroidy
- c. są sobie równe

20. Kierunki wektorów przyspieszenia punktów ciała sztywnego w ruchu płaskim:

- a. są równoległe dla wszystkich punktów ciała
- b. są zależne od fazy początkowej
- c. są jednakowe wzdłuż prostej łączącej dwa punkty ciała

Literatura

A. Literatura podstawowa

1. Leyko J.: Mechanika ogólna, t. 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2020.
2. Misiak J.: Mechanika ogólna, t. 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2020.
3. Niezgodziński T.: Mechanika ogólna, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2020.
4. Kurnik W.: Wykłady z mechaniki ogólnej, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2017.
5. Niezgodziński M.E., Niezgodziński T.: Zbiór zadań z mechaniki ogólnej, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
6. Giergiel J., Giergiel M.: Mechanika Ogólna. Przykłady, pytania i zadania, Wydawnictwo Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2012.
7. Giergiel J., Uhl T.: Zbiór zadań z mechaniki ogólnej, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1987.

B. Literatura uzupełniająca

1. Hibbeler R.C.: Engineering Mechanics, Pearson Education Ltd., 2016.
2. Mieszczerski I.: Zbiór zadań z mechaniki, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1989.
3. Siuta W.: Zbiór zadań z mechaniki technicznej, WSiP, 2009.
4. Sawiak S., Wittbrodt E.: Mechanika ogólna – teoria i zadania, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2017.
5. Buczkowski R., Banaszek A.: Mechanika ogólna w ujęciu wektorowym i tensorowym, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2018.

6. Nizioł J.: Metodyka rozwiązywania zadań z mechaniki, Wydawnictwo Naukowe PWN, WNT, 2020.
7. Hendzel Z., Żylski W.: Mechanika ogólna. Kinematyka (format e-book pdf), Wydawnictwo Politechniki Rzeszowskiej, 2017.
8. Towarek Z.: Mechanika ogólna. Zagadnienia wybrane, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 2017.
9. Kucharski T.: Mechanika ogólna, WNT 2015.

Grafika użyta do rozdzielania poszczególnych rozdziałów:

Ad. 1 – [geralt/Pixabay.com](https://www.geralt.com/)

Ad. 2 – [geralt/Pixabay.com](https://www.geralt.com/)

Odpowiedzi do pytań testowych

Pytanie testowe 1.8		Pytanie testowe 2.4	
1	B	1	C
2	A	2	A
3	C	3	B
4	A	4	C
5	C	5	A
6	C	6	B
7	A	7	C
8	B	8	A
9	C	9	B
10	A	10	A
11	A	11	A
12	C	12	B
13	B	13	A
14	B	14	B
15	A	15	C
16	C	16	B
17	A	17	C
18	B	18	B
19	C	19	C
20	A	20	A
21	B		
22	A		
23	B		
24	B		
25	C		
26	A		
27	C		
28	A		
29	C		
30	A		
31	C		
32	C		
33	B		
34	A		
35	B		
36	C		
37	A		
38	C		
39	B		
40	A		

MECHANIKA TECHNICZNA

Elementy statyki i kinematyki

Część druga

Studia przypadków

Sylwester Samborski

Lublin 2021

Spis treści

Studium przypadku 1.....	145
Studium przypadku 2.....	149
Studium przypadku 3.....	155
Studium przypadku 4.....	159
Studium przypadku 5.....	163

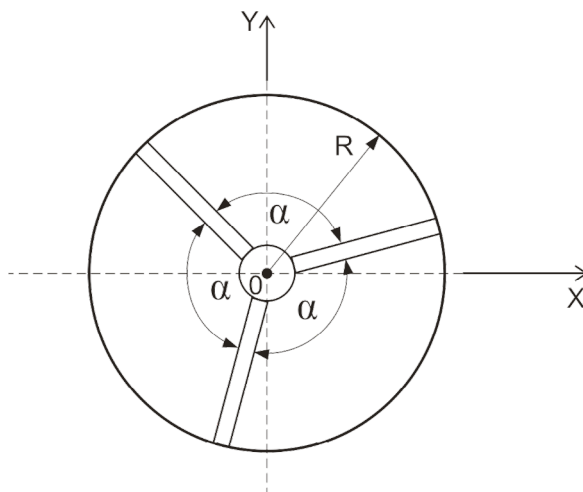
Studium przypadku 1.

A. Opis przypadku

Firma „X” z branży ogrodniczej chce produkować lekkie stojaki choinkowe o zwiększonej stabilności. Rozważane są stojaki 3, 4, 5 i 6 ramienne, wykonane ze stali, przy czym firma dysponuje dużą ilością prefabrykowanych nóżek stalowych. Zauważono, że stojaki 3ramienne bywają wywrotne, choć mają tę zaletę, że nigdy się nie kołyszą¹.

B. Potrzeba – co klient chce zmienić

Klient chce wiedzieć, czy w celu zwiększenia stateczności stojaka konieczne jest zastosowanie aż 5-ciu lub 6-ciu nóżek lub nawet większej liczby nóżek, czy może wystarczą 4?

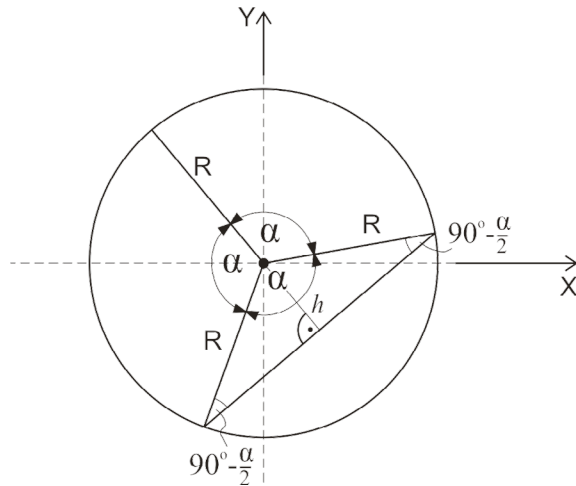


Rys. CS. 1 Schemat obliczeniowy do przypadku 1 dla stojaka 3ramiennego

C. Rozwiązanie problemu

Opracowano schemat obliczeniowy przedstawiony na Rys. CS. 1, biorąc pod uwagę wymiary tulei środkowej, służącej do osadzania w niej drzewka – średnica zewnętrzna tulei to $D=100$ mm, a jej wysokość to $h=120$ mm. Wymiary nóżek sprawiają, że zewnętrzny promień stojaka R , licząc od środka tulei do punktu styku nóżki z podłogą wynosi 480 mm. Wiadomo też, że masa tulei to $m_1=1,2$ kg, zaś masa nóżki to $m_2=0,7$ kg.

¹ Są statycznie wyznaczalne.



Rys. CS. 2 Schemat obliczeń ramienia momentu prostującego

Kąt między nóżkami oblicza się z zależności

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n},$$

gdzie n to liczba nóżek.

Ramię „momentu prostującego” (momentu zapobiegającego wywróceniu choinki, Rys. CS. 2) wynosi:

$$h = R \cos \frac{\alpha}{2}$$

Stąd zależność długości ramienia momentu od liczby nóżek:

$$h = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

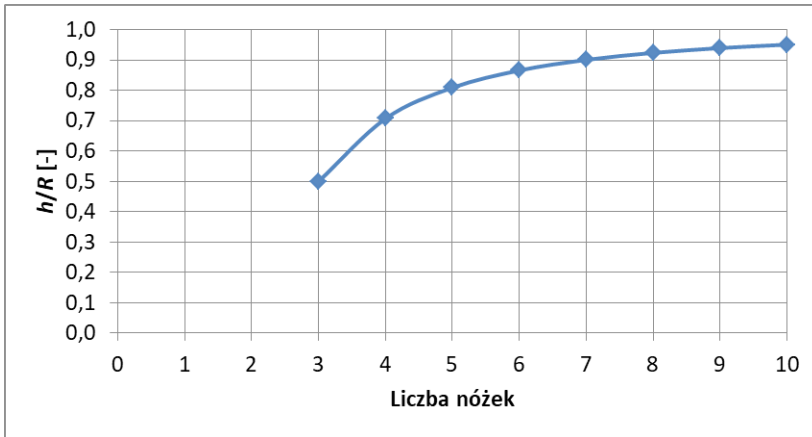
lub w formie bezwymiarowej:

$$\frac{h}{R} = \cos \frac{180^\circ}{n}$$

Wykres tej ostatniej h/R zależności przedstawia Rys. CS. 3. Wynika z niego, że największy „zysk” ze zwiększenia liczby nóg jest w zakresie do 5 nóg. Dalsze zwiększanie liczby nóg mogłoby wpłynąć na niekorzystne zwiększenie masy stojaka, zgodnie ze wzorem:

$$m = m_1 + n \cdot m_2$$

Odkośny wykres przedstawiono na Rys. CS. 4.



Rys. CS. 3 Wykres zależności długości ramienia momentu prostującego od liczby nóg stojaka



Rys. CS. 4 Wykres całkowitej masy stojaka w zależności od liczby nóg

D. Zalecenia dla klienta

Po konsultacji z klientem uzgodniono, że całkowita masa stojaka nie powinna przekraczać 5 kg. Stąd, na podstawie powyższych obliczeń i wykresów zalecono, aby liczba nóg stojaka nie przekraczała 5, przy czym zastosowanie 4 nóg także daje zadowalający efekt poprawy stateczności stojaka. Mianowicie, zwiększenie liczby nóg z 3 do 4 zwiększa ramię momentu prostującego h o 41,4%, zaś dodanie kolejnej, piątej nogi – o 61,8% w stosunku do $n=3$. Zalecono więc ostatecznie stosowanie 5-ciu nóg przy ponadprzeciętnie wysokich choinkach (powyżej 2 m wysokości).

Studium przypadku 2.

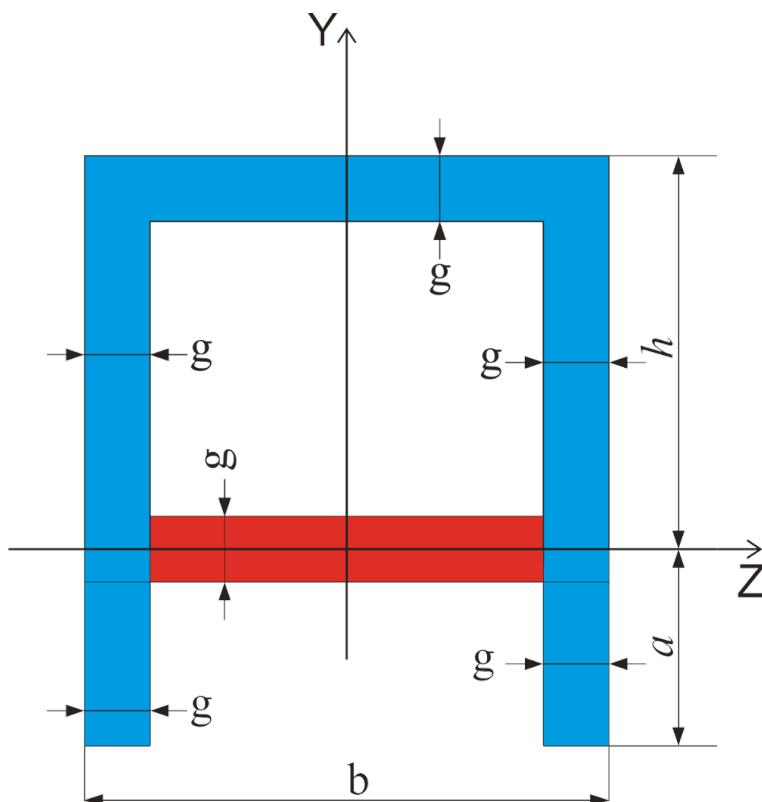
A. Opis przypadku

Firma „Y” z branży budowlanej chce wykorzystać do budowy więźby dachowej hal produkcyjnych belki stalowe o niesymetrycznym kształcie względem osi Z (Rys. CS. 5). Długość belek jest odpowiednia, ale ze względu na wymagania dotyczące tzw. płaskiego zginania należy zapewnić minimalne naprężenia od zginania w dolnej ścianie zamkniętego profilu (kolor czerwony).

B. Potrzeba – co klient chce zmienić

Firma dysponuje dużą ilością płaskownika o przekroju 80x6 mm, którego chce użyć do zmodyfikowania przekroju, przy jak najmniejszym przyroście masy profilu.

Dane: $a=30$ mm, $b=80$ mm, $h=60$ mm, $g=10$ mm.



Rys. CS. 5 Przekrój belki stalowej przed modyfikacją

C. Rozwiązanie

Mówiąc językiem mechaniki, klient potrzebuje zapewnić zero-wą wartość momentu statycznego danego profilu względem osi Z, pokrywającą się z poziomą (wzdłużną) osią symetrii ścianki zaznaczonej kolorem czerwonym. Ograniczeniem jest kształt i wymiary posiadanego płaskownika 80x6 mm. Należy więc zaproponować odpowiednie ustawienie i odsadzenie płaskowników 80x6 mm względem osi Z.

Moment statyczny figury płaskiej powyżej osi Z (z wyłączeniem dolnego czerwonego pasma)² wynosi:

$$S_Z^g = bh \frac{h}{2} - (b - 2g)(h - g) \frac{(h - g)}{2} = 80 \cdot 60 \cdot 30 - 60 \cdot 50 \cdot 25 = 69000 \text{ mm}^3$$

Poniżej osi Z znajdują się dwie krótkie ścianki profilu, o wymiarach $a \times g$, których łączny moment statyczny to:

$$S_Z^d = 2ag \frac{a}{2} = 2 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 15 = 9000 \text{ mm}^3$$

Jak widać, moment statyczny części dolnej jest niewystarczający, aby zrównoważyć moment części górnej profilu. Należy więc określić położenie płaskownika 80x6 mm w odległości od osi Z, tak aby zwiększyć moment statyczny części dolnej o $\Delta S_Z^d = S_Z^g - S_Z^d = 69000 - 9000 = 60000 \text{ mm}^3$.

Zaproponowano klientowi 3 konfiguracje zmodyfikowanego profilu stalowego, wzmocnionego przez dospawanie płaskownika 80x6 mm, opisane niżej³.

1) Konfiguracja 1. – Rys. CS. 6

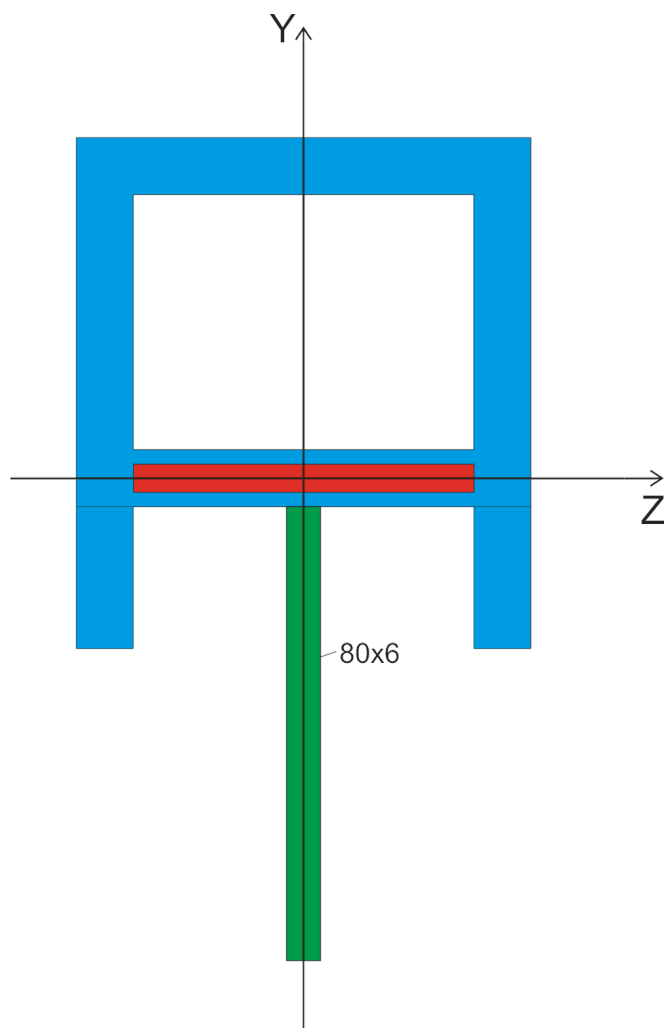
Przy takim ustawieniu płaskownika 80x6 mm (zielony) nie ma możliwości regulacji odsadzenia e_y , ale zwiększenie masy jest nieduże.

² Pasma (ścianka) należy w równym stopniu do części górnej (nad osią Z), jak i dolnej pierwotnego profilu – jest więc symetryczna względem osi Z. W związku z tym jej wkład do momentu statycznego względem osi Z jest zerowy.

³ Wszystkie opisane konfiguracje muszą być symetryczne względem osi Y.

Uzyskane w ten sposób zwiększenie wartości momentu statycznego ΔS_z byłoby jednak mniejsze od wartości wymaganej, zgodnie ze wzorem:

$$\Delta S_z = 80 \cdot 6 \cdot \left(\frac{80}{2} + \frac{g}{2} \right) = 21600 \text{ mm}^3 < \Delta S_z^d$$



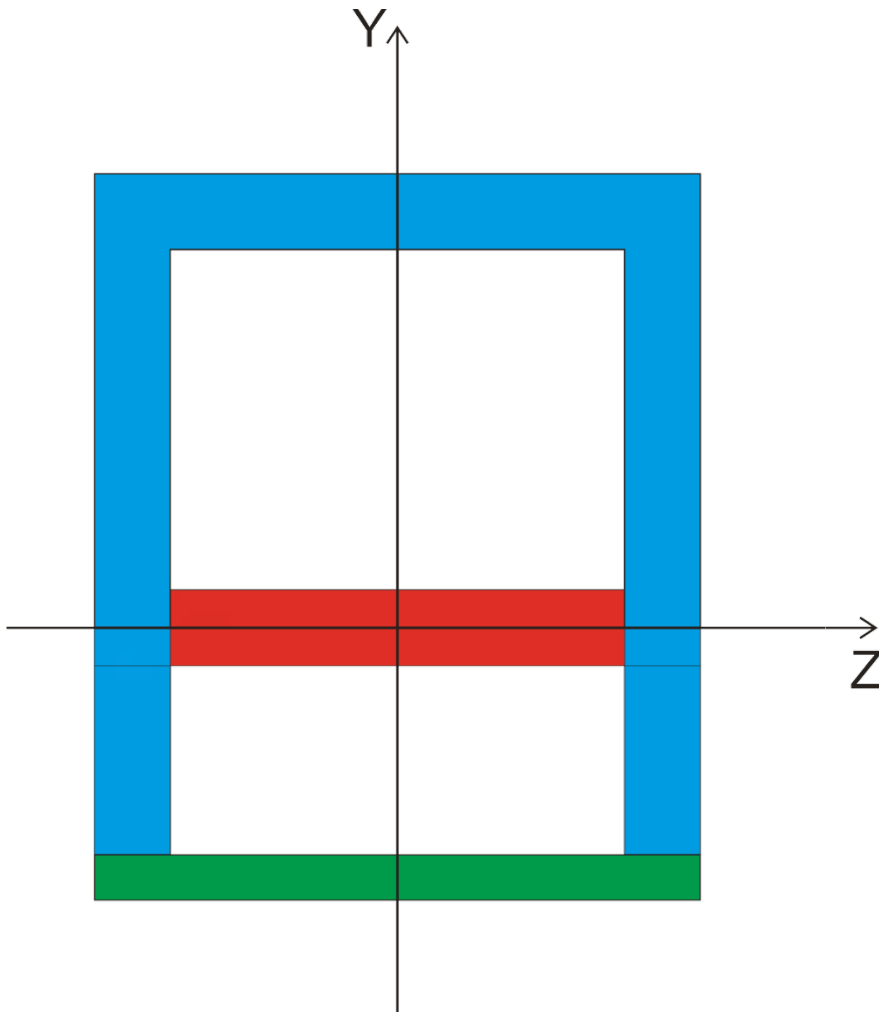
Rys. CS. 6 Konfiguracja 1. zmodyfikowanego profilu stalowego

2) Konfiguracja 2. – Rys. CS. 7

W rozpatrywanej konfiguracji również nie ma możliwości regulacji odsadzenia, ale utworzyłby się korzystny, z punktu widzenia klienta, profil zamknięty. Dla takiego profilu przyrost momentu statycznego wynosi:

$$\Delta S_z = 80 \cdot 6 \cdot \left(\frac{6}{2} + a \right) = 15840 \text{ mm}^3 < \Delta S_z^d$$

Tym bardziej więc przyrost momentu okazał się niewystarczający.



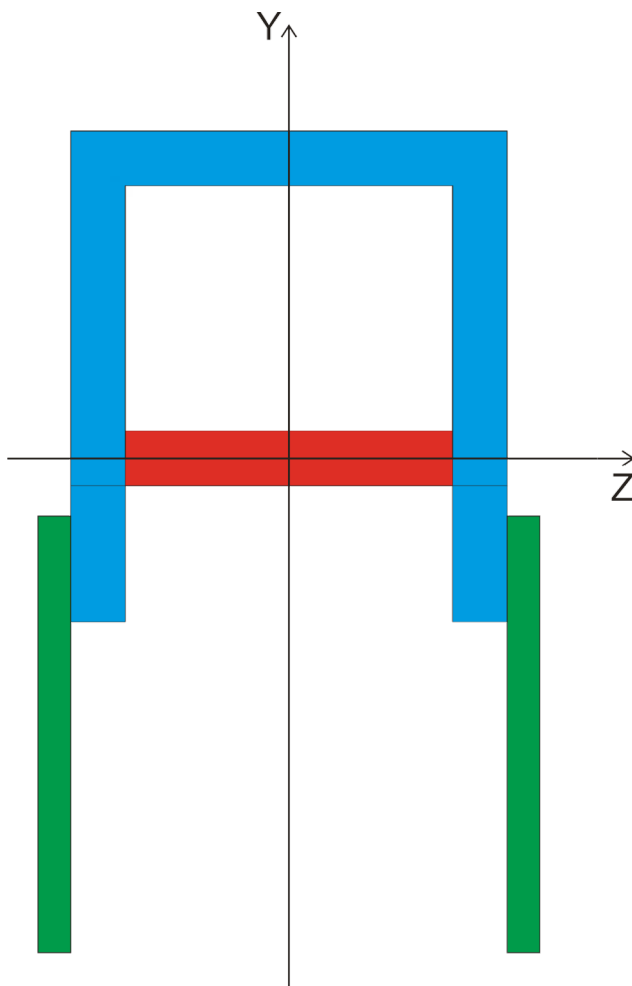
Rys. CS. 7 Konfiguracja 2. zmodyfikowanego profilu stalowego

3) Konfiguracja 3. – Rys. CS. 8

W tej konfiguracji przyrost momentu statycznego można regulować odsadzeniem e_y :

$$e_y = \frac{\Delta S_Z^d}{2 \cdot 80 \cdot 6} = \frac{60000}{960} = 62,5 \text{ mm}$$

Obliczona wartość odsadzenia jest możliwa do zrealizowania przy zadanych wymiarach elementów.



Rys. CS. 8 Konfiguracja 3. zmodyfikowanego profilu stalowego

D. Zalecenia dla klienta

Wskutek przeprowadzonej analizy stwierdzono, że możliwe jest uzyskanie żądanej charakterystyki przekroju (momentu statycznego) profilu stalowego, przy zastosowaniu posiadanych przez klienta płaskowników i rozmieszczeniu ich (przyspawaniu) w położeniu określonym w konfiguracji 3.

Studium przypadku 3.

A. Opis przypadku

Firma „Z” z branży spożywczej używa taśmociągu transportującego tekturowe paczki z towarem z prędkością $u_0=3$ m/s. Masa paczek zawiera się w zakresie 5-22 kg. Na końcu taśmociągu przez 12 godzin dziennie muszą pracować dwie osoby odbierające towar i przekładające na linię do paletowania.

B. Potrzeba – co klient chce zmienić

Klient chce zaprojektować wylot z taśmociągu, kierujący towar bezpośrednio na linię do paletowania, wykonany z blachy nierdzewnej tak, aby prędkość paczek na wylocie nie przekraczała $u=3$ m/s, przy długości wylotu $s=1,5$ m. Niedopuszczalne jest przy tym zatrzymywanie się paczek na blasze.

C. Rozwiązanie

Zadanie sprowadza się zasadniczo do obliczenia kąta nachylenia do poziomu (α) płaszczyzny wylotowej przy podanych wyżej założeniach. Wskutek pomiarów własnych ustalono, że współczynnik tarcia kinetycznego tektury o blachę nierdzewną wynosi około $\mu'=0,23$. Na Rys. CS. 9 przedstawiono schemat obliczeniowy, na podstawie którego można zapisać następujące równania równowagi:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = -T + G \sin \alpha = m\ddot{x}$$
$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = N - G \cos \alpha = 0$$

przy czym $T = \mu'N$ (tarcie kinetyczne).

Ze względu na deklarowaną masę paczek: $m \in \langle 5, 22 \rangle$ kg, ich ciężar zawiera się w przedziale $G \in \langle 49,1, 215,8 \rangle$ N. Z podanego wyżej równania równowagi sił względem osi Y wynika, że $N = G \cos \alpha$, co sugeruje, że wartość siły nacisku paczki na powierzchnię wylotu (równię pochyłą), a w konsekwencji również siły tarcia (T) zależy od dwu zmiennych: masy paczki (m) oraz kąta pochylenia wylotu (α).

Natomiast scałkowanie względem czasu pierwszego równania równowagi daje ogólne wyrażenie na prędkość paczki wzdłuż wylotu

$$\dot{x} = g(\sin \alpha - \mu' \cos \alpha)t + C_1$$

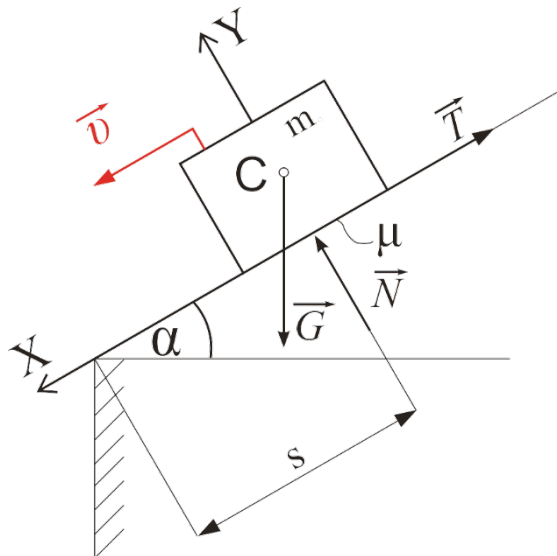
Kolejne całkowanie pozwala uzyskać wyrażenie na drogę paczki w funkcji czasu:

$$x = \frac{1}{2} g(\sin \alpha - \mu' \cos \alpha)t^2 + C_1 t + C_2$$

Stałe całkowania dla zadanych warunków początkowych ($t=0$: $\dot{x}=u_x=u_0$, $x=0$) wynoszą $C_1=u_0$, $C_2=0$, a wtedy wyrażenie na prędkość paczki wzdłuż wylotu przyjmuje postać:

$$v_x(t) = g(\sin \alpha - \mu' \cos \alpha)t + v_0 \text{ lub } v_x(t) = gA(\alpha)t + v_0$$

po wprowadzeniu oznaczenia $A(\alpha) = (\sin \alpha - \mu' \cos \alpha)$.



Rys. CS. 9 Schemat obliczeniowy wylotu z taśmociągu

Wartość prędkości paczki została ograniczona do 3 m/s, co przy prędkości początkowej $v_0 = 0,5$ m/s daje warunek na maksymalną wartość kąta pochylenia wylotu:

$$\max(g(\sin \alpha - \mu' \cos \alpha)t = 2,5 \text{ m/s})$$

albo

$$(\sin \alpha - \mu' \cos \alpha)t \leq \frac{2,5 \text{ m/s}}{g}$$

W celu rozwiązania tej nierówności trygonometrycznej należy w pierw obliczyć czas ślizgu w następujący sposób.

Funkcja położenia paczki w czasie (wzdłuż wylotu) to

$$x(t) = \frac{1}{2} g(\sin \alpha - \mu' \cos \alpha)t^2 + v_0 t \quad \text{lub} \quad x(t) = \frac{1}{2} gA(\alpha)t^2 + v_0 t$$

Pamiętając, że droga ślizgu wynosi $s=1,5$ m można obliczyć czas ślizgu z równania kwadratowego:

$$s = \frac{1}{2} gA(\alpha)t^2 + v_0 t \quad \text{lub} \quad \frac{1}{2} gA(\alpha)t^2 + v_0 t - s = 0$$

Wyróżnik tego trójkianu to

$$\Delta = v_0^2 + 2gA(\alpha)s$$

Jego wartość nie może być ujemna

$$\Delta \geq 0,$$

stąd wartość minimalna kąta nachylenia wylotu wynosi:

$$\min(\alpha) \geq 12,5^\circ.$$

Natomiast czas ślizgu, jako nieujemny pierwiastek podanego wyżej trójkianu

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{\Delta}}{gA(\alpha)}$$

Wstawiając otrzymane wyrażenie do przedstawionej wyżej nierówności trygonometrycznej otrzymuje się warunek:

$$\sqrt{\Delta} \leq 3 \text{ m/s} \Rightarrow \Delta \leq 9 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

i dalej

$$v_0^2 + 2gA(\alpha)s \leq 9 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Stąd

$$A(\alpha) \leq \frac{9 \text{ m}^2/\text{s}^2 - v_0^2}{2gs} \cong 0,297$$

czyli

$$\sin \alpha - \mu' \cos \alpha \leq 0,297$$

Przy $\mu' = 0,23$ nierówność ta jest spełniona dla kąta $\alpha \leq 30^\circ$.

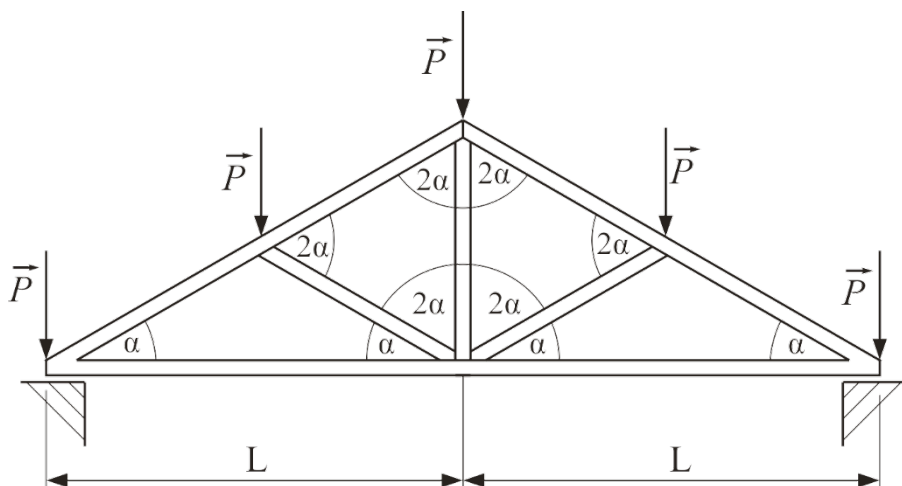
D. Zalecenia dla klienta

Zalecono klientowi zastosowanie kąta pochylenia wylotu w granicach od 12,5 do 30 stopni, przy czym zastrzeżono, że wartości te mogą się zmieniać w zależności od współczynnika tarcia kinetycznego. Dlatego przy zmianie opakowań należałoby ponownie wyznaczyć ten współczynnik.

Studium przypadku 4.

A. Opis przypadku

Firma „Ż” z branży lotniczej planuje remont dachu hali produkcyjnej. Więźba dachowa wykonana jest z 11 dźwigarów kratownicowych przedstawionych na Rys. CS. 10. Kratownica jest wykonana w całości z kształtowników stalowych.



Rys. CS. 10 Dźwigar kratownicowy hali przemysłowej

B. Potrzeba – co klient chce zmienić

Ze względu na uszkodzenia mechaniczne (wygięcie, korozja) prętów dolnych klient zastanawia się, czy można je zastąpić linami lub prętami gwintowanymi, aby dodatkowo wypłaszczyć połacie nieco sfatygowanego dachu.

C. Rozwiązanie

W celu odpowiedzi na pytanie o zastąpienie prętów dolnych linami itp. utworzono schemat obliczeniowy dźwigara, w postaci kratownicy przedstawionej na Rys. CS. 11. Zgodnie z procedurą rozwiązywania kratownic płaskich sprawdzono wprawdzie warunek statycznej wyznaczalności kratownicy:

- liczba węzłów $w=6$,
- liczba prętów $p=9$,

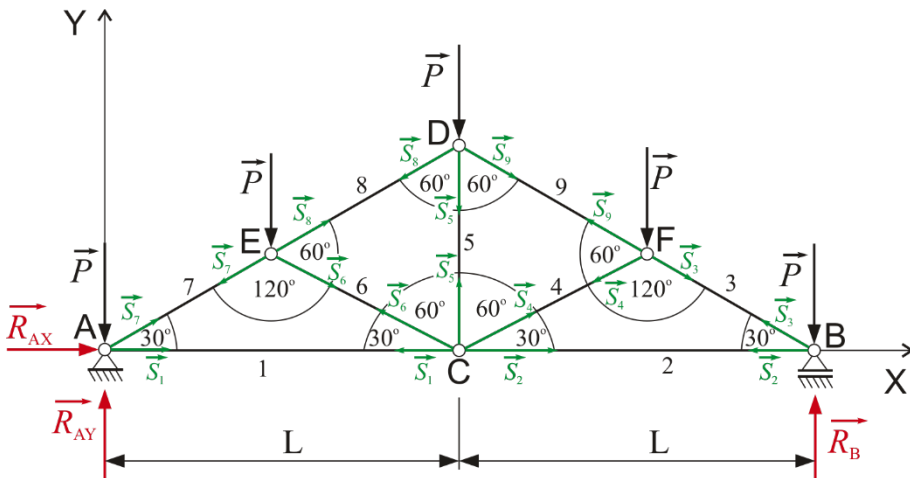
warunek $p=2w-3$ jest więc spełniony – kratownica jest statycznie wyznaczalna, tzn. można obliczyć siły we wszystkich prętach.

Następnie określono długości poszczególnych prętów:

$$|\overline{AC}| = |\overline{BC}| = L$$

$$\frac{\frac{1}{2}|\overline{AC}|}{|\overline{AE}|} = \cos 30^\circ \Rightarrow |\overline{AE}| \cong 0,577L$$

$$|\overline{AE}| = |\overline{BF}| = |\overline{CD}| = |\overline{CE}| = |\overline{CF}| = |\overline{DE}| = |\overline{DF}|$$



Rys. CS. 11 Schemat obliczeniowy kratownicy

Kolejnym etapem obliczeń było wyznaczenie reakcji podpór. Ze względu na obciążenie kratownicy wyłącznie siłami pionowymi (płaski układ sił równoległych) przyjęto $R_{Ax} = 0$. Pozostałe dwie reakcje obliczono z równań równowagi statycznej:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = R_{Ay} + R_B - 5P = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = -P \cdot \frac{L}{2} - P \cdot L - P \cdot \frac{3L}{2} - P \cdot 2L - R_B L = 0$$

Stąd

$$R_{Ay} = R_B = \frac{5}{2}P$$

Obie reakcje mają taką samą wartość, ze względu na symetrię geometryczną dźwigara oraz symetrię obciążenia. Można dzięki temu przyspieszyć także obliczenia sił w prętach, gdyż

$$S_1 = S_2, S_3 = S_7, S_4 = S_6 \wedge S_8 = S_9$$

Wyznaczenie sił w prętach można rozpocząć od węzła A:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = S_7 \cdot \cos 30^\circ + S_1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = S_7 \cdot \sin 30^\circ + R_{Ay} - P = 0$$

Stąd

$$S_7 = -3P^4, \text{ zaś } S_1 = 3\frac{\sqrt{3}}{2}P \cong 2,6P$$

W następnej kolejności można rozwiązać węzeł E:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = -S_7 \cdot \cos 30^\circ + S_6 \cdot \cos 30^\circ + S_8 \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -P - S_7 \cdot \sin 30^\circ + S_6 \cdot \sin 30^\circ + S_8 \cdot \sin 30^\circ = 0$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań są siły

$$S_6 = -2P \text{ i } S_8 = -P$$

Znając siły w prętach nr 8 i 6, a więc także w prętach 4 i 9 (ze względu na symetrię układu) można wyznaczyć siłę w pręcie środkowym (nr 5), rozpatrując równowagę węzła D:

⁴ Znak minus oznacza, że dany pręt jest ściskany.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = -S_8 \cdot \cos 30^\circ + S_9 \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -P - S_8 \cdot \sin 30^\circ - S_9 \cdot \sin 30^\circ - S_5 = 0$$

Pierwsze równanie dowodzi słuszności przyjęcia zasady symetrii – wynika z niego bowiem, że $S_8 = S_9$. Drugie równanie daje wartość szukanej siły w pręcie nr 5: $S_5 = -2P$

Przeprowadzone obliczenia pokazały, że większość prętów w kratownicy (dźwigarze) jest ściskana (ujemne wartości sił wewnętrznych). Jednakże siły w dolnych prętach – nr 1 i 2 są dodatnie:

$S_1 = S_2 \cong 2,6P$, a więc pręty te są rozciągane i jako takie mogą być zastąpione linami (ciągnami).

D. Zalecenia dla klienta

Wskutek przeprowadzonej analizy statycznej stwierdzono, że klient może zastąpić dolne pręty w dźwigarach dachu hali produkcyjnej elementami pracującymi jedynie na rozciąganie (ciągną w postaci lin itp.), o ile wykonane zostaną stosowne obliczenia wytrzymałościowe tych elementów przy założonym obciążeniu dachu.

Studium przypadku 5.

A. Opis przypadku

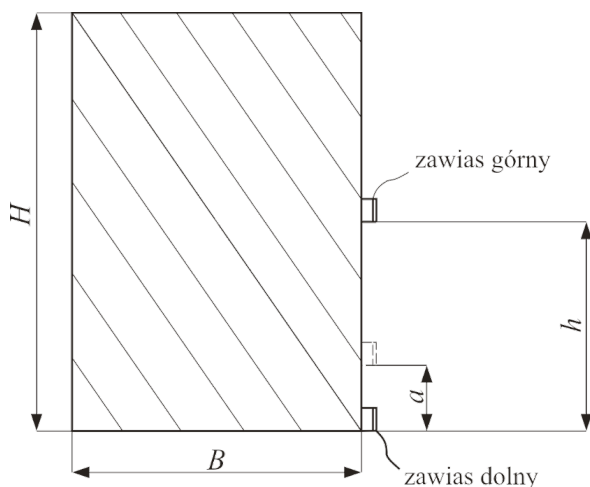
Firma „Ż” z branży budowlanej otrzymała zlecenie na wykonanie bramy wjazdowej na cmentarz komunalny. Brama składa się z dwóch skrzydeł, zawieszonych na 2 zawiasach każde (Rys. CS. 12). Masa jednego skrzydła to $m=500$ kg, wysokość całkowita skrzydła $H=5,5$ m, szerokość $B=3,1$ m; wysokość górnego zawiasu $h=2,8$ m.

B. Potrzeba – co klient chce zmienić

Ze względu na konieczność zamocowania na dole bramy napędu klient chce przesunąć dolny zawias w górę. Powstało pytanie, jak wysoko można przesunąć dolny zawias?

C. Rozwiązanie

Zadanie sprowadza się do obliczenia maksymalnej wartości wymiaru a (Rys. CS. 12), przy założeniu, że oba zawiasy mają minimum trzydziestoprocentowy zapas nośności⁵.



Rys. CS. 12 Wymiary skrzydła bramy wjazdowej

Oczywiście a nie może przekroczyć wartości h , nawet jeśli zawiasy potraktuje się jako punkty elementy o znikomo małych wymiarach, w stosunku do gabarytów skrzydła.

⁵ Oznacza to, że możliwe jest bezpieczne zwiększenie sił działających na każdy zawias o 30%.

Analiza statyczna – równowagi sił działających na skrzydło została przeprowadzona dla dwu skrajnych położeń:

- 1) brama (skrzydło) zamknięta – Rys. CS. 13,
- 2) brama w pełni otwarta – skrzydło obrócone o 90° , Rys. CS. 14.

W położeniu zamkniętym skrzydło bramy znajduje się w płaszczyźnie XY przyjętego układu odniesienia. Równania równowagi sił są następujące:

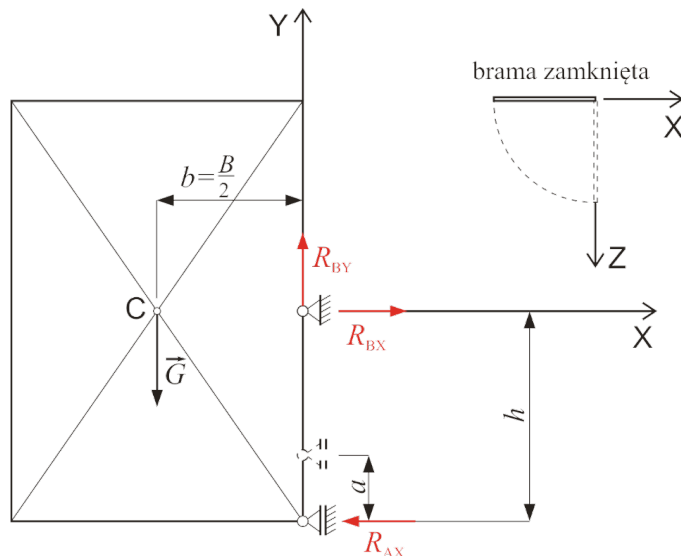
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = R_{Ax} - R_{Bx} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = R_{By} - G = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iBz} = G \cdot b - R_{Ax} \cdot (h - a) = 0$$

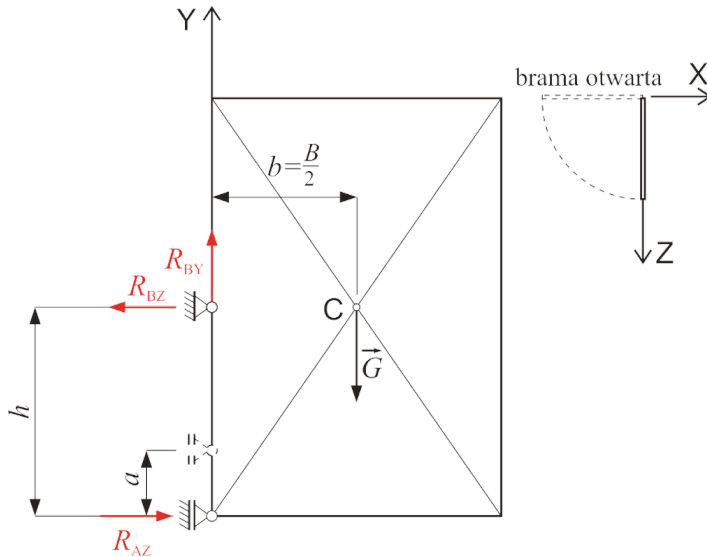
Wynika stąd, że:

$$R_{Ax} = R_{Bx}, \quad R_{By} = G \quad \wedge \quad R_{Ax} = \frac{G \cdot b}{h - a}$$



Rys. CS. 13 Schemat obliczeniowy nr 1) do przypadku 5.

Widać, że zwiększanie wysokości położenia dolnego zawiasu (wymiar a) prowadzi do wzrostu wartości reakcji poziomych w obu zawiasach.



Rys. CS. 14 Schemat obliczeniowy nr 2) do przypadku 5.

Gdy brama jest w pełni otwarta, skrzydło znajduje się w płaszczyźnie YZ. Równania równowagi sił mają wówczas postać:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{iy} &= R_{By} - G = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{ix} &= R_{Ax} - R_{Bz} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{iBx} &= -R_{Ax} \cdot (h - a) + G \cdot b = 0 \end{aligned} \quad ,$$

stąd wartości reakcji wynoszą:

$$R_{Az} = R_{Bz}, \quad R_{By} = G \quad \wedge \quad R_{Ax} = \frac{G \cdot b}{h - a}$$

Ponownie – zwiększanie wymiaru a skutkuje wzrostem wartości reakcji poziomych w zawiasach.

Można ogólnie zapisać:

$$R_x = R_z = \frac{G \cdot b}{h - a}$$

Jeżeli dopuszczalna wartość reakcji wzdłuż osi X oraz Z może zostać zwiększona o 30%, jak wspomniano wyżej, to można postawić warunek:

$$R_x = R_z \leq R_{\text{maks}} = 1,3 \cdot \left. \frac{G \cdot b}{h - a} \right|_{a=0} = 1,3 \cdot \frac{G \cdot b}{h}$$

Wynika z niego, że

$$\frac{G \cdot b}{h - a} \leq 1,3 \cdot \frac{G \cdot b}{h}$$

i dalej

$$\frac{1}{h - a} \leq \frac{1,3}{h} \Rightarrow 1,3 \cdot (h - a) \geq h \Rightarrow 0,3 \cdot h \geq 1,3 \cdot a$$

Ostatecznie

$$a \leq \frac{0,3}{1,3} \cdot h \cong 0,23 \cdot h$$

D. Zalecenia dla klienta

W wyniku przeprowadzonych obliczeń statycznych zalecono klientowi, aby wartość przesunięcia zawiasu w górę nie przekraczała $a=60$ cm. Zasugerowano też wykonanie sprawdzających obliczeń wytrzymałościowych, z uwzględnieniem rzeczywistych wymiarów zawiasów.

- Grafika użyta do rozdzielania poszczególnych rozdziałów:
1. Ad. 1 – [geralt/Pixabay.com](https://www.pixabay.com/)
 2. Ad. 2 – [geralt/Pixabay.com](https://www.pixabay.com/)

Z recenzji:

Mechanika jest działem fizyki obejmującym ruch ciał materialnych. Zajmuje się ona ustalaniem praw ruchu ciał materialnych, a także zastosowaniem tych praw do opisu niemal wyidealizowanych schematów ciał rzeczywistych (typu punkt materialny, bryła doskonale sztywna itp.). Zaś mechanika techniczna stanowi zbiór zagadnień z mechaniki ciał i punktów materialnych przystosowany dla potrzeb techniki.

(...) Podręcznik zawiera syntetyczny wykład przedmiotu, w którym niemal każda strona zawiera przypisy w formie komentarzy, mające za zadanie ułatwić studentowi głębsze zrozumienie praw mechaniki. (...) Ponadto omawiane treści poparte są dużą ilością grafiki, ułatwiającej zrozumienie przytaczanych pojęć i praw. Przekazane w tak przystępnej formie informacje (wektory, wizualizacje, komentarze w formie przypisów itp.), łatwiej trafiają do odbiorcy. Dużą wartość podręcznika stanowi druga część, gdzie prezentowane rozwiązania studium przypadków są zrealizowane na podstawie zleconych prac z przemysłu, co dodatkowo pokazuje praktyczny aspekt wykorzystania praw wynikających z mechaniki, szczególnie na studiach o profilu praktycznym.

dr hab. inż. Mariusz Walczak

Wyższa Szkoła Ekonomii i Innowacji w Lublinie

20-209 Lublin, ul. Projektowa 4

tel.: +48 81 749 17 77

www.wsei.lublin.pl

ISBN – wersja elektroniczna: 978-83-66159-81-5

**WSEI** LUBLIN
WYDAWNICTWO NAUKOWE
INNOVATIO PRESS